

TREBALL DE RECERCA

El món de les fractals i càlcul de la dimensió fractal del Cap de Creus

Guillem Carrion Teixidó
Dirigit per Assumpta Salellas
2ⁿ de Batxillerat
Institut Illa de Rodes

20 d'octubre de 2010

“Las maravillas sin límite
surgen a partir de reglas
simples que se repiten
infinitamente”

Benôit B. Mandelbrot

AGRAÏMENTS:

A la meva tutora de treball Assumpta Salellas per haver-me ajudat tant en la orientació i realització d'aquest treball. Gràcies a ella i a les seves explicacions he pogut comprendre molts dels conceptes que comporten fer un treball ambientat al món matemàtic, i més concretament al món de les fractals. Sens dubte, sense el seu suport no hagués pogut avançar en aquest treball.

A la professora Margarida Campillo per haver-me orientat en aspectes d'organització i presentació del treball. Al professor Lluís Colomer per ajudar-me amb consells sobre la presentació del treball i els seus continguts. A la professora Sandra Canaleta, per resoldre'm dubtes en alguns aspectes de la redacció.

A l'exposició "*Armonia fractal de Doñana y las Marismas*" del "Cortalet" (Parc Natural dels Aiguamolls de l'Empordà (Girona)) inaugurada el 7 de maig d'aquest mateix any, que em va donar una primera idea sobre el món de les fractals i la seva relació amb la natura.

A la meva família per facilitar-me un bon ambient de treball en els moments en que requeria més concentració. Concretament a la meva mare, Marta Teixidó, per haver-me ajudat a corregir els errors sintàctics i ortogràfics.

Finalment també m'agradaria agrair al professor titular de Matemàtica Aplicada del Departament de Matemàtiques de la UAB, Joan Torregrosa, per la xerrada informativa celebrada el 28 d'abril del 2010, on ens va donar (a mi i a la meva tutora) idees pel treball, com la utilització del *Box Counting*.

ÍNDEX

I.	Introducció	1
II.	Part teòrica	
	II.1 Fractals	3
	II.1.1 Propietats de les fractals	4
	II.1.2 Classes de fractals	6
	II.1.3 Aplicacions	9
	II.2 Dimensió fractal	13
	II.2.1 Exemple de dimensió fractal	16
	II.3 <i>Box Counting</i>	18
	II.3.1 Exemple del càlcul de la dimensió fractal d'una figura	20
	II.4 Geometria fractal	23
	II.5 Breu història de les fractals	26
III.	Part pràctica	
	III.0 Introducció a la part pràctica	30
	III.1 Obtenció de mapes	32
	III.2 Preparació de la imatge	36
	III.3 Càlcul de la dimensió fractal	40
	III.4 Anàlisi dels resultats	43
IV.	Conclusions	44
V.	Referències	45
VI.	Annexos	
	A. Imatges	47
	B. Resultats	48
	C. Article	55

I. INTRODUCCIÓ

Què és una fractal? Alguna vegada hem sentit parlar d'aquest concepte en diferents contextos sense saber ben bé el que és. Tot i no apreciar la seva existència a primera vista, les fractals estan relacionades amb molts aspectes que mai hauríem imaginat. Un àmbit a on el món de les fractals es reflecteix notablement és a la natura. Hi ha multitud d'espècies, ja siguin plantes o animals, formacions geològiques o fins i tot fenòmens meteorològics que segueixen una estructura fractal o que, si més no, hi tenen certa similitud.

Si observéssim detalladament figures tan ordinàries com la fulla d'un arbre, la closca d'un cargol, la desembocadura d'un riu, etc, podríem observar com segueixen un cert ordre, formant una figura de naturalesa fractal.

Sense anar més lluny, les fulles de certes espècies vegetals tenen una estructura repetitiva que segueix un dels principis dels fractals¹. Un cas on es veu molt clarament és a les fulles de falguera. Aquestes fulles estan formades per ramificacions més petites però auto semblants, és a dir, rèpliques de la fulla principal (veure imatge 1 de l'annex A).

Geològicament també existeixen estructures fractals, ja siguin formacions de rius, muntanyes, o el perfil de la costa. Al veure que el món de les fractals ens afecta més del que nosaltres podem observar, vaig decidir enfocar aquest treball cap a aquest àmbit.

El Cap de Creus ha estat des de sempre un punt destacat de les nostres costes, ja sigui perquè és un dels caps més pronunciats de la costa catalana o perquè té una configuració geològica molt singular. En aquest treball m'he volgut centrar en aquest últim ítem. La multitud de platges, cales, petits entrants i sortints, fa que el Cap de creus tingui un perfil únic i complex. Si observem un mapa aeri del Cap de creus, podem veure un sortint de terra amb un perfil més o menys diferenciat sense gaire complexitat, però, a l'ampliar la imatge, descobrim que cada petit sortint que vèiem definit clarament va adquirint un nou perfil amb més "rugositats".

¹ Hi ha diverses característiques que defineixen els fractals (que s'explicaran més endavant), en aquest cas es fa referència a l'autosemblança (les diferents escales de detall tenen formes similars)

Aquest fenomen es pot relacionar amb algunes de les propietats de les fractals com l'autosemblança a diferents escales i la complexitat a diferents nivells d'observació.

Com més tard explicaré amb més detall, tota forma o figura té dimensió, incloent les fractals. En aquest cas, la dimensió de les fractals pot ser fraccionària, és a dir, pot estar compresa entre els nombres enters que defineixen la dimensions de les figures euclidianes (0,1,2, 3...). Com que el Cap de Creus segueix un patró fractal, la seva dimensió també és fraccionària, i, en aquest treball, m'he fixat com a objectiu descobrir aquesta dimensió, la dimensió de la costa del Cap de creus.

Però, abans de passar a la part del treball més "pràctica", cal introduir-se en aquest món i comprendre conceptes per a més tard poder seguir el procediment utilitzat per calcular certa dimensió. Primerament, explicaré els conceptes generals necessaris, seguidament, la història i evolució del món de les fractals i, com a últim pas, calcularé la dimensió fractal del Cap de Creus.

A grans trets, amb aquest treball d'investigació pretenc:

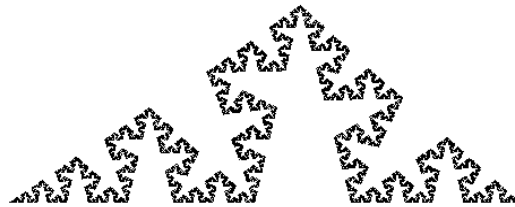
- Introduir el/la lector/a a l'àmbit de les fractals i als conceptes bàsics conseqüents que comporta la seva comprensió.
- Fer un breu resum de la història i evolució de l'estudi de les fractals, des del seu inici fins a l'actualitat.
- Calcular la dimensió fractal del Cap de Creus aplicant els conceptes apresos.

Espero que aquest treball serveixi al lector o lectora per reflexionar sobre la implicació de les eines matemàtiques a la vida de les persones i el seu entorn, encara que no sigui visible a primera vista.

Us animo a tots a llegir-lo, mai n'hi ha prou a l'hora d'ampliar coneixements!

II.1 FRACTALS

Benôit Mandelbrot², en la seva obra *Fractals: Form, Chance and Dimension* (1977) va definir el terme fractal de la següent manera: “Una fractal és per definició, un conjunt la dimensió de Hausdorff-Besicovitch del qual és estrictament major a la seva dimensió topològica” (Benôit Mandelbrot, 1977). Algú que no conegui aquests termes li resultarà impossible comprendre aquesta definició. Com que en apartats posteriors explicaré amb més detall què significa “dimensió fractal” o “dimensió de Hausdorff-Besicovitch”³, de moment només cal quedar-se amb una idea general; la dimensió d'un objecte fractal no coincideix amb un nombre enter (com les figures euclidianes), sinó que, degut a les seves “rugositats”, la dimensió és fraccionària (decimal). Per exemple, en aquesta imatge hi ha representat una fractal formada per



Fractal il·lustrativa on s'aprecia que la seva dimensió no és euclidiana

una línia que té una forma específica. En teoria, la línia és de dimensió 1, però com també es pot apreciar, hi ha talls on la línia s'apropa tan amb ella mateixa que sembla que hi hagi una part d'àrea, de dimensió 2. Per això aquesta fractal segurament tindrà una dimensió fractal compresa entre 1 i 2.

En canvi, la dimensió topològica d'una figura és aquella intuïtiva i pragmàtica d'entendre, és a dir, la que a primera vista ens imaginem. Per exemple, un punt té dimensió 0, una línia té dimensió 1, un quadrat té dimensió 2, un cub té dimensió 3 i el buit té dimensió -1. En el mateix exemple d'abans, si considerem la part blanca com el buit, la dimensió topològica seria 1, ja que a efectes pràctics la figura està formada per una línia.

Amb aquesta definició, Mandelbrot pretenia agrupar totes aquelles figures que segueixen una de les propietats que més destaquen en les figures fractals, la seva dimensió fraccionària. Però, si fóssim estrictes, caldria afegir altres propietats no nombrades a la definició de Mandelbrot, com la autosemblança,

² Benoît Mandelbrot (20 de novembre de 1924 – 14 d'octubre de 2010) ha sigut el principal matemàtic que ha definit les bases de la geometria fractal durant la dècada dels setanta. Abans de morir amb 85 anys ocupava el lloc de professor a la Universitat de Yale y cooperava amb l'empresa IBM.

³ La denominació de “dimensió de Hausdorff-Besicovitch” fa referència als descobridors d'aquesta mateixa, però Mandelbrot l'anomena *dimensió fractal* per a no confondre's.

el caos, i altres. Per aquest motiu, estrictament parlant, una figura fractal és, explicat des d'un altre punt de vista i d'una manera senzilla i completa, aquella forma o dibuix geomètric format normalment per parts idèntiques que, alhora, són també idèntiques al model original. La forma del dibuix general es troba repetit en miniatura dins d'ell mateix, i dins la "versió en miniatura" es pot tornar a trobar una versió encara més petita del dibuix. Per tant, es diu que l'estructura d'una fractal és similar, però no necessàriament idèntica en tots els punts de la forma ni en totes les escales d'observació. Per això és difícil definir la mida d'una fractal, ja que en el seu interior hi ha moltes escales diferents. Tot i així, el que sí que es pot definir és la forma de la unitat de repetició bàsica.

II.1.1 PROPIETATS DE LES FRACTALS

Aquesta última seria la definició d'una figura fractal, però, com pensava Mandelbrot, segurament el que defineix millor les fractals són les seves característiques i propietats. Les propietats de les figures fractals són:

- **L'autosemblança.** Aquesta propietat és pròpia de moltes de les fractals estudiades, encara que no és una propietat restrictiva, és a dir, poden existir estructures fractals sense cap tipus d'autosemblança. Aquesta característica es basa en que les diferents parts de la figura s'assemblen a la figura en si, independentment de l'escala d'observació en que ens trobem. Segons el grau d'autosemblança, les figures fractals poden ser de tres tipus:
 - *Autosemblança exacta*, són aquelles figures fractals on, sigui quina sigui l'escala d'observació, les parts són idèntiques al tot. Aquest cas es dona en figures fractals formades per la iteració⁴ d'equacions lineals.
 - *Autosemblança quasi exacta*, es dona quan la figura és aproximadament idèntica a les seves parts, ja que pot ser que les parts estiguin distorsionades. En el conjunt de Mandelbrot⁵ es dona el cas que a diferents escales s'hi poden observar petites diferències.

⁴ La iteració consisteix en aplicar una funció n vegades sobre el mateix resultat anterior.

⁵ El conjunt de Mandelbrot és considerat una de les figures fractals més conegudes.

- *Autosemblança estadística*, és troba en aquelles figures fractals a on la relació d'autosemblança és més dèbil, és a dir, quan al canviar d'escala es mantenen un cert nombre de mesures i proporcions però sense ser idèntiques.

- **Caos.** La propietat relacionada amb el caos de les fractals concreta que les figures fractals segueixen un ordre caòtic, però ordre a la fi. El caos es defineix com aquell comportament que no es pot preveure i que aparentment és aleatori. La teoria que estudia aquest fenomen és la **teoria del caos**. Aquesta teoria proposa que és impossible predir una interacció futura si no es tenen totes les dades inicials que influeixen en ella, però que si fóssim capaços de controlar totes les condicions inicials, podríem preveure fins i tot el comportament caòtic. Per aquest motiu, les fractals segueixen un ordre basat en la teoria del caos, ja que és molt improbable predir en quin punt et trobaràs si vas iterant una funció infinites vegades. Un exemple és el fum dins una xemeneia, mai podem saber on anirà a parar una partícula de fum després d'haver recorregut tota la xemeneia, ja que hauríem de tenir en compte milions de dades sobre les condicions inicials. Un altre cas conegut de la teoria del caos és l'efecte papallona enunciat pel meteoròleg Edward Lorenz el 1960. Aquesta hipòtesis de Lorenz va sorgir quan ell mateix estava intentant trobar un model matemàtic que expliqués tots els comportaments del clima per a tal de fer-ne prediccions posteriors. Lorenz va aconseguir crear un model bastant exacte, però es va adonar que qualsevol modificació o error en les dades suposades (inicials), comportava una gran distorsió en les previsions a llarga durada. Per això va exposar un exemple basat en que, com anuncia la teoria del caos, qualsevol condició no contemplada inicialment pot provocar alteracions significatives en el resultat final. Ho va exemplificar dient que el moviment de les ales d'una papallona pot ser la causant d'un huracà a l'altre punta del món, ja que l'efecte es va multiplicant creant perturbacions més grans.

A part de la relació de la teoria del Caos amb les fractals que he esmentat, també hi ha altres aspectes que cal comentar respecte aquesta propietat de les fractals. S'ha de dir que encara que les fractals impliquin el concepte de Caos, el Caos no implica l'aparició de fractals.

- **Dimensió fractal.** Aquesta propietat, explicada més detalladament en el pròxim apartat, és basa en que tota figura té una dimensió, incloent les fractals. Però, enlloc de tenir dimensions enteres, com les figures euclidianes, les figures fractals tenen dimensió fraccionària. Aquesta dimensió té un valor (decimal), i és aquest valor el que buscaré en la part pràctica d'aquest treball.
- A part de tenir les propietats ja esmentades, les figures fractals també compleixen diferents ítems com que són massa irregulars com per descriure-les amb la geometria euclidiana⁶, posseeixen detall a qualsevol escala d'observació, i altres característiques derivades d'aquestes.

II.1.2 CLASSES DE FRACTALS

Les fractals es poden classificar segons moltes característiques, però en general les podem classificar en:

- Fractals matemàtiques
 - Escalades o Lineals
 - No escalades o No lineals
- Fractals naturals

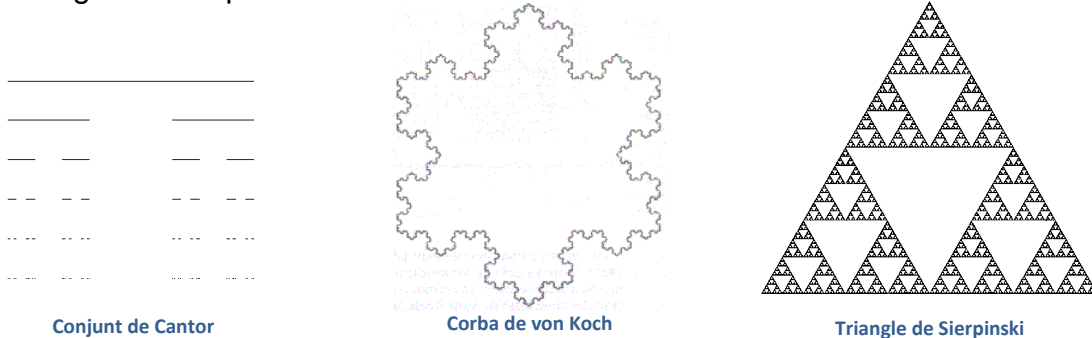
Les fractals matemàtiques són aquelles figures fractals creades a partir de processos matemàtics que es basen en la iteració⁷ de funcions. Aquest tipus de fractals són molt estrictes respecte les propietats, ja que tenen escales

⁶ És aquella geometria que estudia el pla i l'espai tridimensional estrictament. És la geometria més acceptada i tradicional, ja que explica multitud de fenòmens.

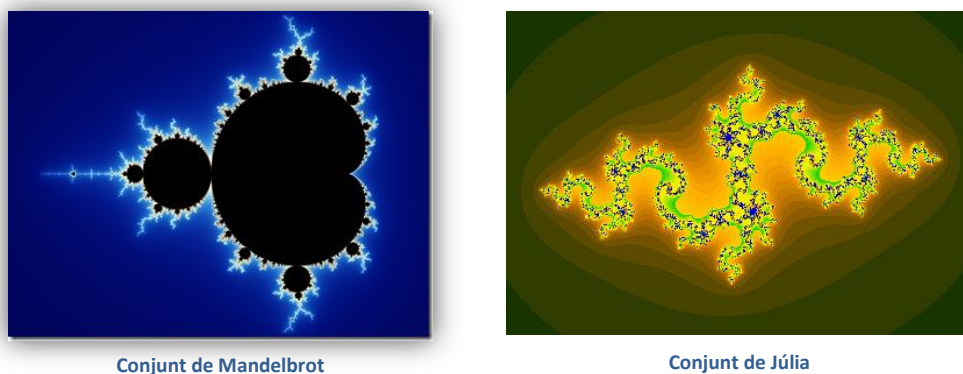
⁷ Aquesta iteració es realitza mitjançant l'ús d'algoritmes, la qual cosa explica la recent aparició de l'estudi dels fractals com a camp de les matemàtiques. Cal dir que, tenint en compte que una fractal s'obté iterant fins a l'infinit, ens adonem que, en la pràctica, una iteració fins a l'infinit és impossible de realitzar. Per això, el concepte de fractal perfecte només es pot comprendre de forma teòrica.

d'observació infinites. Les fractals creades a partir d'una base matemàtica es poden classificar en dos grans grups: lineals i no lineals.

Les fractals lineals són aquelles que es construeixen amb un simple canvi de variació en les seves escales, això implica que la seva autosemblança sigui exacta, i, per aquest motiu, també se les anomena fractals escalades. Exemples de fractals lineals són el Conjunt de Cantor, la Corba de von Koch i el Triangle de Sierpinski.



Per altre banda, les fractals no lineals són aquelles que es generen a partir de distorsions complexes o, com diu el mateix nom, distorsions no lineals. La majoria de les fractals purament matemàtiques y naturals són no lineals. Al no ser lineals, la propietat d'autosemblança no es compleix sempre, encara que poques vegades es troben fractals no lineals amb autosemblança exacta, per això les fractals no lineals també se les anomena fractals no escalades. Exemples de fractals no lineals són el Conjunt de Mandelbrot i el Conjunt de Júlia.



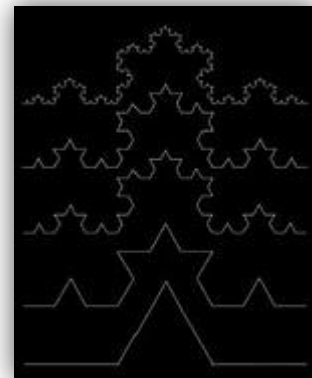
A part de les fractals creades a partir de processos matemàtics existeixen les estructures fractals naturals. Les figures fractals naturals són aquelles que podem trobar a la natura i que s'han creat mitjançant processos naturals, com els llamps, arbres, perfils de costa, etc. Cal dir que a aquest últim tipus de

fractals hi podem afegir-hi una altra característica, l'atzar, ja que, a vegades, la propietat d'autosemblança no és destacable a causa de que el creixement de la figura ha estat pur atzar. Moltes vegades s'aplica el concepte de fractal a la natura, no per senyalar objectes estrictament fractals, sinó per destacar elements que segueixen alguna/es de les característiques fractàliques.

A continuació podem veure exemples d'una fractal natural i una fractal matemàtica.



Forma fractal formada a la Marisma de San Fernando, Cádiz.
©Héctor Garrido, 2006



Procés de construcció de l'estructura fractal matemàtica
anomenada Corba de Koch

Com hem dit abans, moltes vegades s'apliquen les fractals per tal de descriure propietats dels objectes naturals, com és el cas de la primera imatge. En la primera imatge, la propietat d'autosemblança està poc definida, però sí que segueix altres característiques com la dimensió no euclidiana, o el caos. En canvi, en la segona imatge, podem veure *La Corba de Koch*, que és una fractal matemàtica (creada mitjançant un procediment regit per unes normes i lleis) on hi ha incloses característiques destacables com l'autosemblança, la dimensió fractal o el caos.

II.1.3 APLICACIONS

Les fractals són presents en molts àmbits, fins i tot en camps on aparentment no hi tenen res en comú. Hi ha moltes disciplines científiques a on, gràcies als nous descobriments sobre fractals, s'ha pogut solucionar problemes que no tenien explicació. També, s'ha pogut extrapolar els avenços de les fractals a moltes eines.

No descriuré totes les aplicacions que poden tenir les fractals, sinó que esmentaré les més esteses:

- **Biologia.** Aquest camp és un dels camps on les fractals hi intervenen més. Tot i així, les investigacions relacionades amb el món de les fractals tot just acaben de començar, ja que cal considerar que fa només quatre dècades que és va plantejar la geometria fractal.

Anteriorment, la biologia es basava en els patrons de la geometria d'*Euclides*, però, a partir del descobriment de les fractals, s'ha estès d'una forma lògica el mètode fractal. La geometria fractal explica molt millor tots aquells sistemes i processos biològics que tenen molts nivells d'estructura. El fet que la geometria fractal pugui explicar formes complexes a qualsevol escala d'observació, fa possible una millor comprensió de les formes naturals, que, amb la geometria euclidiana, es mostraven com formes perfectes sense "rugositats".

Podem trobar un exemple recent. No fa gaire, es van trobar seqüències d'ADN autosemblants, quan s'estava estudiant la història evolutiva d'organismes amb seqüència m-ADN fent servir un mètode avançat anomenat "espectre multifractal". L'espectre multifractal de invertebrats i vertebrats era bastant diferent, fet que es va interpretar com que eren de branques evolutives diferents. Per aquest motiu, es va concloure que les seqüències d'ADN presenten propietats fractals, i, aquestes, es poden estudiar per determinar relacions evolutives entre espècies.

- **Comunicacions.** Modelatge del tràfic en xarxes. S'aprofita la propietat de l'autosemblança per tal de sintetitzar missatges i fer que la comunicació sigui més fluïda i ràpida.

- **Economia.** Encara que sembli que no té res a veure, les fractals es poden aplicar a la economia, fins i tot, Benôit Mandelbrot va participar en diferents investigacions a on es demostrava que l'aplicació de les fractals en l'economia era efectiva. Per donar un exemple, les fractals poden servir per fer un anàlisi de la borsa i el mercat.
- **Enginyeria.** La geometria fractal obra moltes oportunitats a l'hora de crear aparells o màquines més eficients. Un exemple a donar són les antenes fractals, investigades per un grup d'enginyers de la UPC. Aquestes antenes tenen un perímetre fractal, per tal de poder augmentar la seva capacitat de captura de senyal.
- **Física.** Transicions de fase en el magnetisme. Els objectes magnètics tenen com a característica principal el seu camp magnètic, definit per paràmetres que mesuren la seva força d'atracció i altres característiques. Experimentalment, s'ha descobert que, a vegades, al modificar alguna de les condicions en que es troba aquest objecte, aquests paràmetres varien dràsticament. Recentment s'ha pogut constatar que aquest fenomen es pot explicar mitjançant les fractals.
- **Geologia.** En l'àmbit de la geologia, la geometria fractal s'utilitza per a anàlisis de patrons sísmics, explicar fenòmens d'erosió i crear models de formacions geològiques. En la topografia també s'aplica la geometria fractal, per tal de determinar propietats fractals de costes, les seves dimensions fractals, etc. Com més gran sigui la dimensió fractal d'una zona costera, més rugositats i més detalls haurà de tenir el mapa.
- **Infografia.** Paisatges fractals. Com que la geometria fractal s'adequa molt a la realitat, s'usen patrons de construcció fractals per tal d'obtenir paisatges (com muntanyes, rius, costes, etc) totalment inventats, però amb un realisme considerable. Aquest sistema s'utilitza en produccions cinematogràfiques (per crear decorats), i substitueix a mètodes anteriors

que eren manuals, fet que comportava més esforç i augmentava els costos.

- **Informàtica.** Compressió d'àudio i vídeo. Comprimir una imatge autosemblant és fàcil ja que, per a comprimir-la, només cal emmagatzemar les dades de la figura original i el nombre de cops que es repeteix. Per a poder fer-ho amb altres imatges no autosemblants, el que s'intenta és buscar patrons de semblança per tal de poder comprimir d'una forma efectiva. Tot i així, aquest sistema no està desenvolupat del tot, ja que, el procés de buscar patrons de semblança és lent i necessita ordinadors potents.
- **Matemàtiques.** Convergència de mètodes numèrics. A part de tot el que suposa acceptar un altre model geomètric dins les matemàtiques, les fractals tenen relació amb aquelles funcions que, iterades un cert nombre de vegades, convergeixen en un sol punt.
- **Meteorologia.** És pràcticament impossible fer prediccions a llarg termini, perquè, com he esmentat anteriorment, qualsevol dada que no s'hagi tingut en compte a l'inici de la previsió pot canviar dràsticament el resultat final. Per aquest motiu, l'aplicació de fractals augmenta el percentatge d'incert en previsions meteorològiques, ja que aquests fenòmens segueixen patrons fractals.
- **Música.** Composició musical. Les propietats de les fractals també es poden usar per tal de crear composicions musicals a on la reiteració, la iteració i les matemàtiques complexes hi són presents. Aquest fet demostra que el món de les fractals també pot tenir relació amb les arts que, a part de la bellesa de les representacions gràfiques, també són belles obres a on s'hi aplica alguna de les propietats fractals.

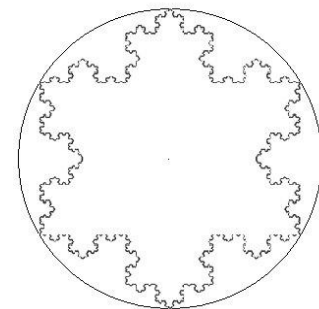
- **Química.** Agregació per difusió limitada (DLA). Aquest fenomen consisteix en que, partícules que es mouen lliurement per un espai concret, tendeixen a agrupar-se formant agregats d'aquestes partícules. Aquestes partícules agrupades formen formes de naturalesa fractal. En la imatge 2 de l'annex A podem veure un exemple d'una estructura DLA generada per una solució de sulfat de coure en una cèl·lula de electrodepositació.
- **Robòtica.** Robots fractals. Actualment està en vies de desenvolupament un tipus de robot capaç de canviar de forma, autoreparar-se i interaccionar amb l'entorn, la seva construcció del qual (petits cubs amb una mida de l'ordre de 100.000 àtoms) està intrínscament relacionada amb les fractals.

II.2 DIMENSIÓ FRACTAL

El concepte de *dimensió fractal* té moltes definicions específiques però cap de universal. De fet, aquest concepte només es refereix a aquella dimensió que no té un valor enter (com en la geometria euclidiana⁸), sinó que pot presentar una dimensió fraccionària.

Com tota forma o objecte, les figures fractals també tenen una dimensió pròpia i única en cada cas. Abans de que aparegués la geometria fractal, segurament hauríem definit la dimensió d'una d'aquestes figures amb un valor enter comprés entre 0 i E, ja que en la geometria d'*Euclides*, la dimensió es defineix com el nombre de direccions en l'espai que una figura té "llibertat" de desenvolupament. Però, com diu Mandelbrot en el seu llibre "*La geometria fractal de la naturalesa*" (Mandelbrot, 1983) "*Durant la crisi que va de 1875 a 1925, els matemàtics es van adonar que no era possible una comprensió correcta d'allò irregular y fragmentat⁹ [...] si es defineix la dimensió com un nombre de coordenades.*" (Mandelbrot, 1983). De fet,

si s'utilitza el concepte de dimensió tradicional en objectes de naturalesa fractal, els resultats numèrics obtinguts són irrealment o il·lògics. Per exemple el corba de Koch, topològicament té dimensió 1, però no la podem tractar com a una corba. Per aquest motiu es va definir el concepte de *dimensió fractal*, per a poder



Corba de Koch

definir d'una forma més precisa les característiques de les figures fractals. Fins i tot s'ha observat que hi ha una relació entre el valor de la dimensió fractal d'una figura fractal i la idea de quant sembla omplir completament l'espai en la que està compresa. És a dir, com més gran és la dimensió fractal, més espai sembla omplir.

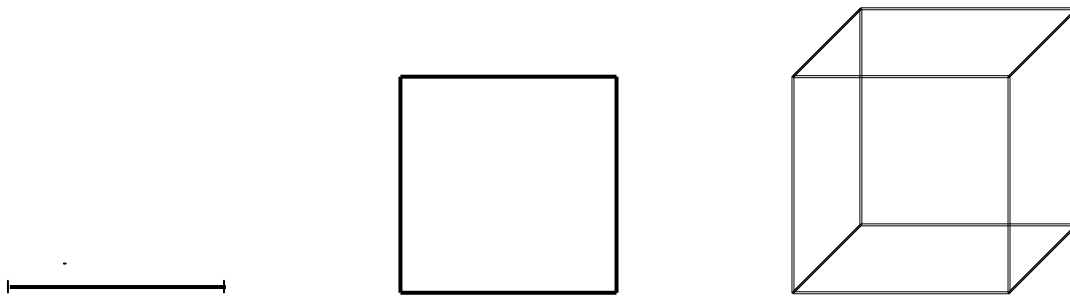
La dimensió fractal d'una fractal es pot calcular per diversos mètodes, el més pràctic és el *Box Counting* (explicat en aquest treball).

⁸ La geometria euclidiana és la geometria tradicional ue estudia els objectes o figures i les seves relacions en un espai.

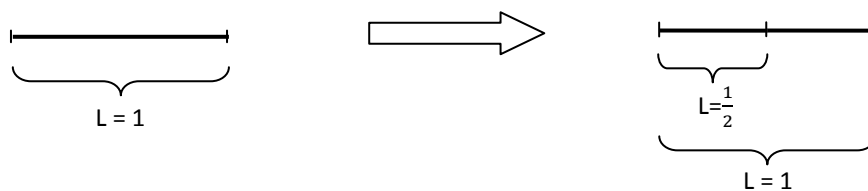
⁹ Referint-se a les figures fractals.

Per poder entendre que una dimensió pot tenir un caràcter fraccionari, explicaré un altre dels mètodes per tal de calcular la dimensió fractal d'aquelles fractals lineals.

Primerament prenem com a referència figures bàsiques de la geometria euclidiana, un punt, un segment, un quadrat i un cub. Seguint la seva definició, un punt té dimensió 0, un segment té dimensió 1, un quadrat té dimensió 2 i un cub té dimensió 3.



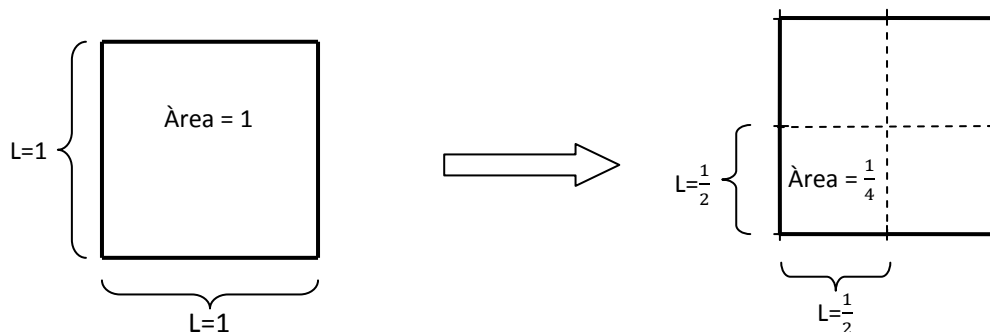
Partint d'un segment de longitud 1, el dividim en dues parts iguals de longitud $\frac{1}{2}$:



Com que la longitud serà el doble dels fragments d'aquesta divisió, podem extreure que:

$$L = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$$

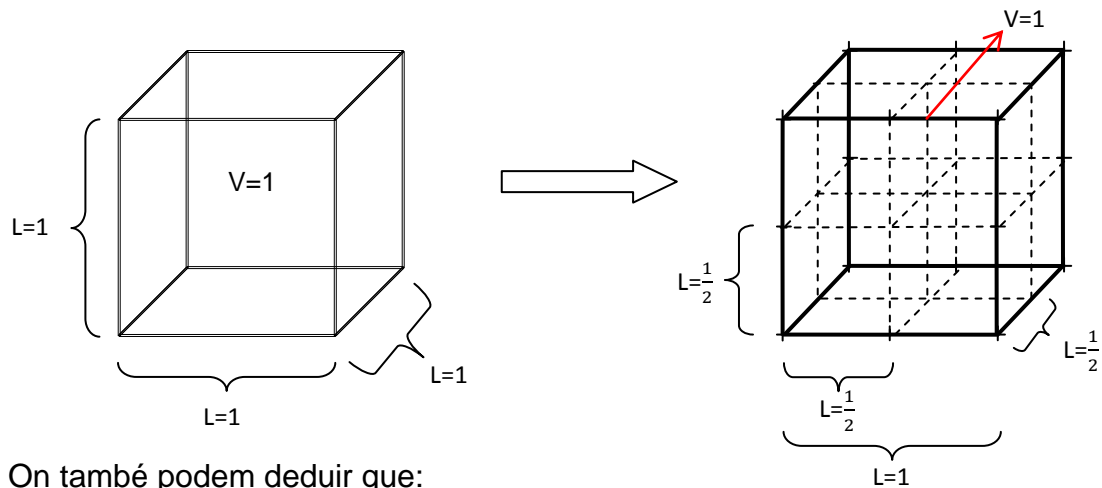
El mateix procés el podem aplicar a un quadrat:



I en podem extreure que:

$$A = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

I, finalment, seguint el mateix procés aplicat a un cub podem extreure que:



On també podem deduir que:

$$V = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$$

A partir d'aquestes deduccions, podem comprovar que en tots tres casos segueixen una igualtat general:

$$N \times \left(\frac{1}{r}\right)^d = 1$$

On N és el nombre de subdivisions de la figura, r és el nombre de divisions que fem a cada pla i on d és la dimensió en la que es desenvolupa la figura.

Si pretenem aïllar el valor de la dimensió (d), podem extreure que:

$$N \times \left(\frac{1}{r}\right)^d = 1$$

$$N \times \frac{1^d}{r^d} = 1$$

$$N = r^d$$

Arribat a aquest punt, mitjançant la propietat matemàtica dels logaritmes ($\log A^b = b \times \log A$) i arribem a:

$$\log N = d \times \log r$$

$$d = \frac{\log N}{\log r}$$

De fet, aquesta equació a la que hem arribat es tracta d'una equació generalitzada de la dimensió euclidiana.

II.2.1 EXEMPLE DE DIMENSIÓ FRACTAL

Una vegada trobada l'equació general per el càlcul de la dimensió d'una figura fractal lineal, la podem demostrar aplicant-la a una fractal real, en concret a el triangle de Sierpinski.

En aquest cas, el procés de creació d'aquest fractal és el següent:

1. A partir d'un triangle qualsevol, es procedeix a la divisió d'aquest en quatre triangles inscrits, els vèrtexs dels quals coincideixen amb el punt mig de cada costat del triangle inicial. Seguidament s'elimina el triangle central.
2. S'aplica el pas 1, infinites vegades, als nous triangles creats.



Gràfic del procés de generació de la fractal anomenada triangle de Sierpinski

Per a poder calcular la dimensió fractal d'aquesta figura utilitzant l'equació general formulada anteriorment, cal identificar prèviament els conceptes per tal d'aplicar l'equació:

$$d = \frac{\log N}{\log r}$$

En aquest exemple, si definim el valor N com el nombre de subdivisions que es realitzen de la figura, N val 3, ja que cada triangle el dividim en 3 triangles més petits¹⁰.

Un cop determinat el valor de N , cal fer el mateix amb el valor r . Com que el valor r es defineix com el nombre de divisions que fem en cada pla, en aquest cas, el seu valor és 2, ja que dividim cada costat del triangle en dos segments iguals.

¹⁰ Cal tenir en compte que encara que es realitzin 4 divisions, el triangle central no el comptem com a subdivisió (ja que posteriorment l'eliminem).

Finalment, una vegada obtinguts els valors N i r , podem procedir a calcular la dimensió d'aquesta figura fractal:

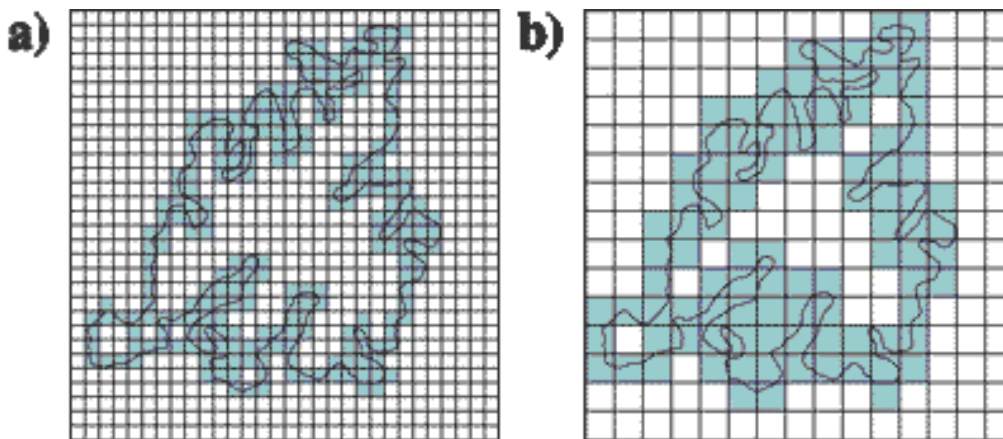
$$d = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.584962501$$

Com podem observar, la dimensió obtinguda és de caràcter fraccionari, fet que confirma l'existència de figures amb dimensió fractal.

A part de calcular la dimensió fractal d'aquesta figura, es interessant destacar que l'àrea resultant d'aquest fractal és 0, ja que en cada divisió que fem, extraïem un 25% de l'àrea del triangle al que estem aplicant la divisió. Aquest fenomen, portat a l'infinit, ens fa arribar a la conclusió que l'àrea de la fractal, aplicat a l'infinit, és 0.

II.3 BOX COUNTING

El *Box Counting* és un mètode analític usat per a calcular numèricament la dimensió fractal d'una imatge. El sistema aprofita la propietat d'autosemblança de les fractals. Aquest mètode rau en sobreposar una quadricula sobre la imatge a ser analitzada, formant un recobriment de "caixes". El procediment consisteix en comptar el nombre de "caixes" (d'aquí el nom de *Box Counting*) que tenen valors de la estructura, és a dir, a on hi ha algun punt de la imatge. Aquest valor N_ϵ ¹¹ depèn íntegrament de la amplada (ϵ) de la "caixa", o sigui, de les diferents escales d'observació. Quan menor sigui ϵ , les "caixes" tindran una mida menor, però en canvi, hi haurà més caixes a on hi hagi algun valor de l'estructura. Per exemple:



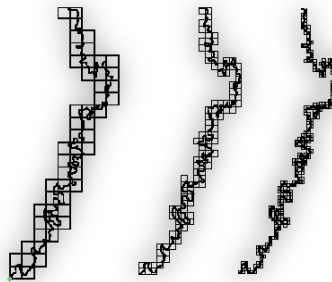
Comparació entre dues imatges iguals a on s'ha aplicat el mètode del Box Counting amb ϵ diferents

En aquest cas podem observar que en la figura a) i b) hi ha la mateixa figura, la diferència evident és la mida de les "caixes" que conformen les malles corresponents. A la figura b), les caixes són més grans que en la figura a), però en canvi, hi ha un número inferior de caixes seleccionades. Passa l'inrevés a la figura a), les caixes són petites, però n'hi ha moltes més seleccionades.

Com es pot observar, quan l'escala d'observació disminueix ($\epsilon \downarrow$), la precisió augmenta, és a dir, com més petita és la mida de les divisions de la malla, a cada una d'aquestes caixes hi ha una coincidència amb la figura major.

¹¹ Nombre de "caixes" comptades.

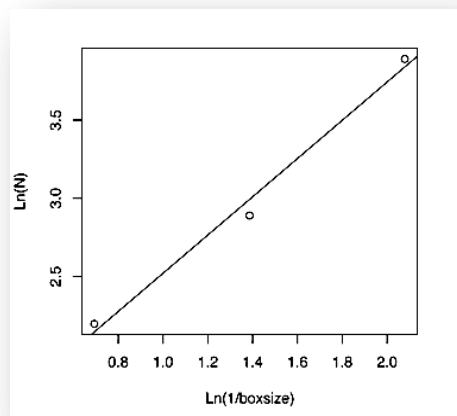
En el següent exemple també es pot veure clarament:



Exemple de l'aplicació del Box Counting a diferents escales
d'observació

A partir del recompte del nombre de caixes, en podem elaborar una taula, relacionant el nombre de caixes utilitzades i la mida del costat d'aquestes. Un cop tenim les dades de diferents escales d'observació, en podem crear un gràfic. Adjudiquem a l'eix de les abscisses el valor del logaritme de l'invers d' ϵ ($\log \frac{1}{\epsilon}$)¹², i a l'eix de les ordenades el logaritme de N_ϵ , nombre de "caixes" no buides.

Un cop realitzat el gràfic, ens doïa un resultat semblant a aquest:



Una vegada tenim els punts corresponents, en fem la recta de regressió¹³. Es dóna el cas que, la pendent de la recta quan $\epsilon \rightarrow 0$ formada en el gràfic, coincideix amb la dimensió fractal de la figura. El fet de que $\epsilon \rightarrow 0$ és important, ja que, com més petita és la mida del costat de les "caixes", més precisió, i com a conseqüència, el càlcul tindrà menys error (ja que el Box Counting és un mètode estadístic). Per això, d'aquí en podem extreure que:

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

¹² Amplada del costat de la caixa.

¹³ $y = \bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$

II.3.1 EXEMPLE DEL CÀLCUL DE LA DIMENSIÓ FRACTAL D'UNA FIGURA

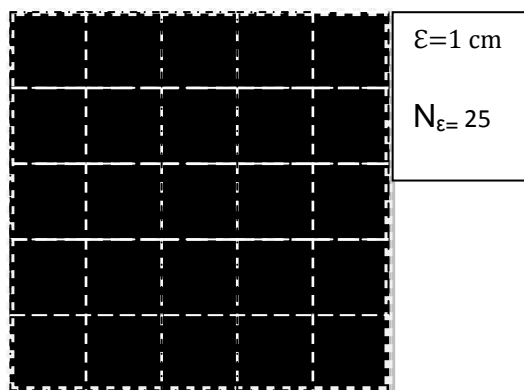
Un bon mètode per a comprovar que es pot calcular de forma viable la dimensió fractal amb el mètode del Box Counting (aplicant la funció anteriorment esmentada) és exemplificant-ho. Si apliquem aquest mètode sobre una figura de dimensió coneguda, com és un quadrat (dimensió 2), hauria de donar exactament aquest mateix valor.

El procés per a calcular la dimensió fractal d'un quadrat mitjançant el Box Counting és el següent:

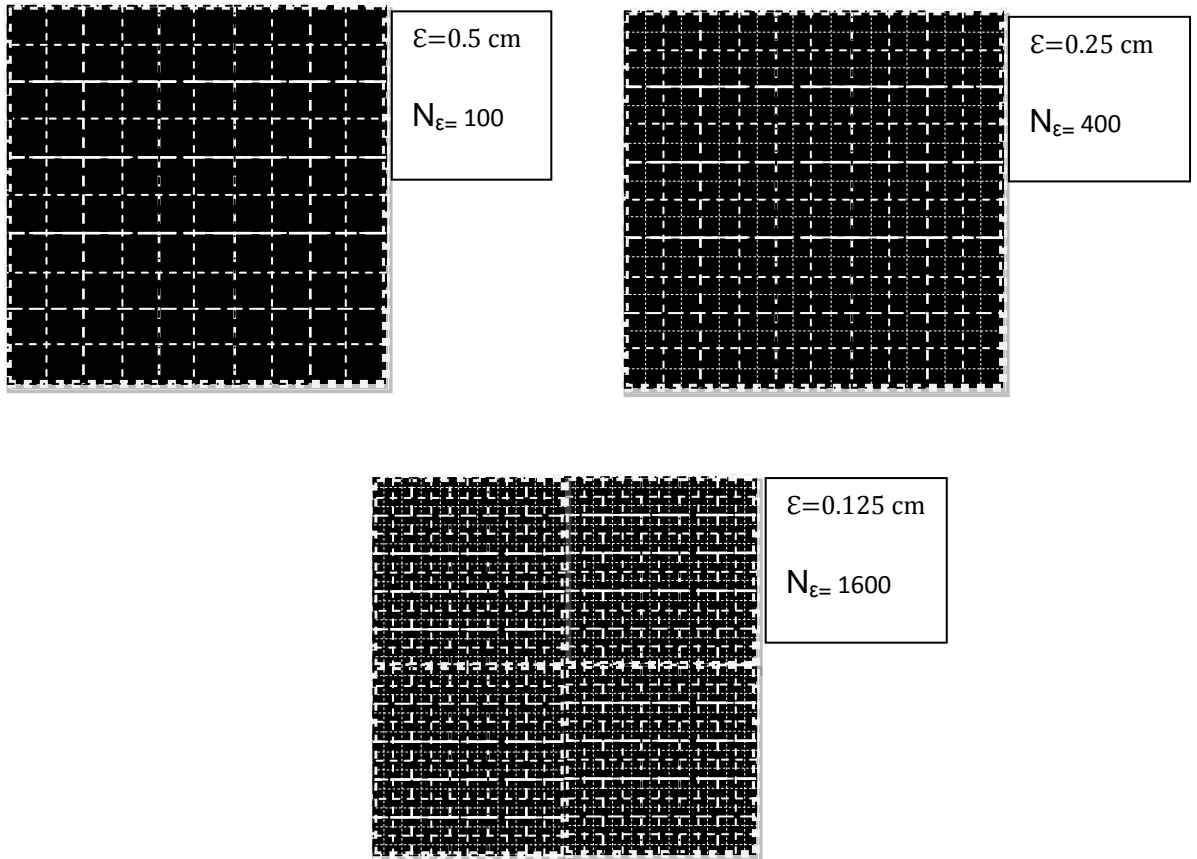
1. Tenim la figura a analitzar, en aquest cas, una superfície quadrada de dimensions (5 cm x 5 cm)



2. Hi superposem una malla dividida per segments de costat igual, primerament de costat 1 cm.



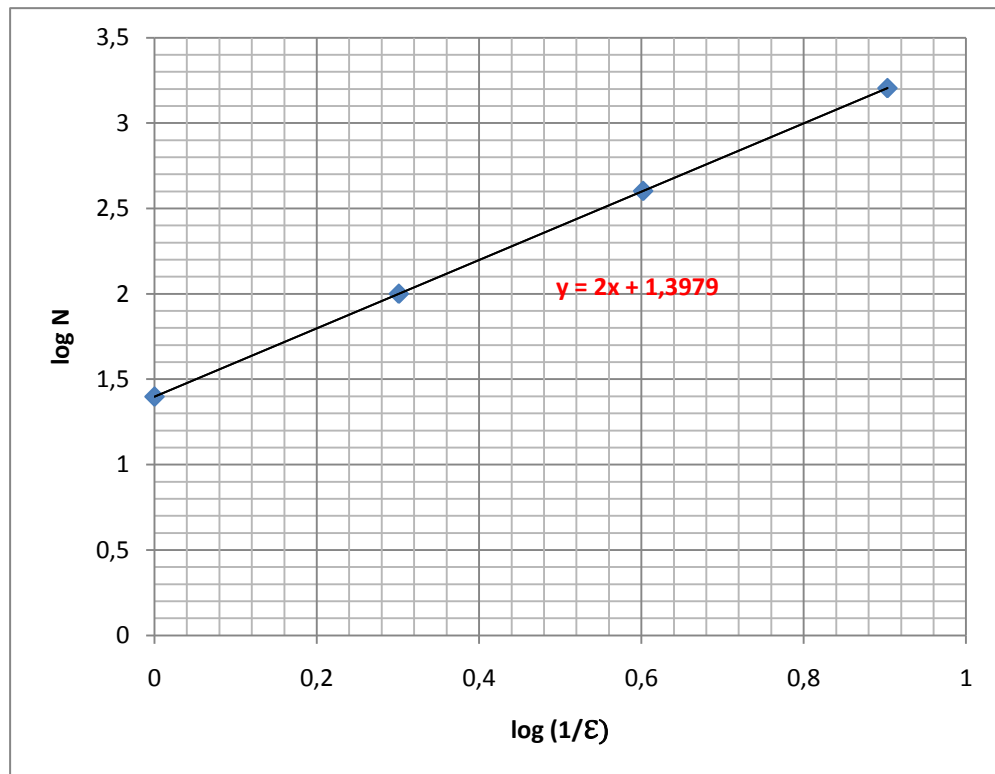
3. Procedim a fer el mateix però amb diferents escales d'observació menors, com per exemple, 0.5, 0.25 o 0.125 cm.



4. Recomptem les “caixes” en que hi ha part de la figura, i un cop obtingudes les dades, passem a elaborar-ne una taula:

ϵ (longitud del costat en cm)	N_{ϵ} (nombre de caixes contades)
1	25
0.5	100
0.25	400
0.125	1600

5. A partir de la taula, en fem una gràfica amb els valors de $\log N$ i $\log \frac{1}{\epsilon}$:

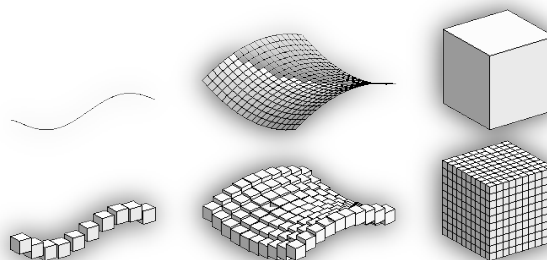


Gràfica amb els valors de $\log N$ i $\log \frac{1}{\epsilon}$

6. El resultat de la gràfica és una recta definida com $y = 2x + 1,3979$.

Com que sabem que la dimensió correspon a la pendent de la recta formada per el gràfic, i que la recta formada és del tipus $y = mx + b$, en podem esbrinar la dimensió. En aquest cas, $m = 2$, tal i com havíem suposat inicialment. També podríem comprovar-ho, ja que sabem que la pendent d'una recta està definida com $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Aquest exemple és un dels molts que es poden realitzar, ja que si enlloc de una quadrat utilitzéssim una línia continua, la dimensió obtinguda mitjançant aquest sistema seria 1. Cal esmentar que aquest sistema també funciona en figures de dimensió superior a 2, però enlloc de "caixes", es procedeix a fer-ho amb "cubs", per això si utilitzéssim aquest mètode en un cub, la dimensió seria de 3.



Exemples d'utilització del mètode Box Counting amb "cubs" enlloc de "caixes"

II.4 GEOMETRIA FRACTAL

Introduint el llibre de Benôit Mandelbrot *The Fractal Geometry of Nature* (1982), l'autor diu:

“¿Perquè moltes vegades es descriu la geometria com quelcom «fred» y «sec»? Una de les raons es la seva incapacitat de descriure la forma d'un núvol, una muntanya, una costa o un arbre. Ni els núvols són esfèrics, ni les muntanyes còniques, ni les costes circulars, ni l'escorça és suau ni tampoc un raig és rectilini.” [...] “Crec que moltes de les formes naturals són tan irregulars y fragmentades que, en comparació amb Euclides¹⁴, la naturalesa no només presenta un grau major de complexitat, sinó que aquesta es dona a un nivell diferent. El nombre d'escales de longitud de les diferents formes naturals es , a efectes pràctics, infinit”. (Benôit Mandelbrot, 1983) Traducció lliure.

A mesura que la ciència ha evolucionat, els matemàtics, biòlegs, meteoròlegs i científics en general han intentat trobar un model matemàtic que pogués explicar d'una forma més realista la naturalesa (entenent naturalesa com tot allò material que ens envolta, no només la botànica) que no la geometria euclidiana, on les formes descrites són massa senzilles per a poder arribar al grau de complexitat del món real. Aquí és on intervé la geometria fractal. Aquest model matemàtic pretén solucionar, almenys provisionalment, els problemes existents a l'hora de descriure qualsevol objecte del món real, ja que, mitjançant la geometria d'*Euclides*, resulta impossible de detallar la seva estructura i la precisió aplicada és molt inferior comparada amb la que obtenim si apliquem el model geomètric fractal. La geometria fractal resol un mont d'incògnites i dubtes, ja que, sumada a la geometria clàssica, és capaç de descriure pràcticament tot objecte material.

Actualment, gràcies als avenços en àmbits com la informàtica, la programació, etc, la geometria fractal n'ha sortit molt beneficiada. La potencia i rapidesa dels ordinadors a l'hora de fer càlculs combinat amb la base matemàtica de la geometria fractal, ha fet possible que aquesta teoria s'hagi desenvolupat molt ràpidament, sobretot en l'àmbit de

¹⁴ Referint-se a la geometria euclidiana.

recreació de la realitat o comprensió d'aquesta mateixa. Per exemple, si volguéssim crear el model d'una muntanya, imaginada per nosaltres mateixos, mitjançant la geometria euclidiana, podríem definir-la com un con gegant. Segurament explicariem les irregularitats dient que són petits cons, esferes i altres figures adherides al gran con. D'aquesta manera podríem crear una aproximació, més o menys real, de la muntanya que volem. El problema resideix en que, si anéssim ampliant una part de la muntanya, veuríem que hi ha un moment on no hi ha més rugositats, és a dir, la complexitat tindria un límit (ja que adherir petites figures infinites vegades és impossible), fet que en el món real no passaria. En canvi, mitjançant la geometria fractal, podríem crear un model molt més precís, ja que per molt que disminuïssim l'escala d'observació, el grau de complexitat es mantindria constant, és a dir, mai trobaríem una part sense rugositats. Per això, els models de la geometria fractal són molt més fidels a la realitat que no pas els models de la geometria d'*Euclides*.

Un altre exemple per poder veure la diferència entre quan s'aplica la geometria tradicional o la geometria fractal a la realitat és el següent:

Suposem que fem una enquesta a un nombre considerable de persones formulant la pregunta següent: *Quan creu que mesura la línia de costa entre Portbou i l'Escola?*. Probablement, la majoria de gent respondria amb una dada, uns 70 quilòmetres aproximadament. Però, quina longitud té realment?

Si agafem un regle d'un metre com a unitat de mesura, suposadament ens donarà un valor aproximat a 70 km, però, i si enlloc d'un metre agafem un centímetre? Llavors, quan estiguéssim mesurant el perfil, tindríem en compte més rugositats (sortints i entrants) que no pas amb un metre, i la mesura final seria més exacta. De la mateixa forma, podríem utilitzar un regle d'un mil·límetre, o d'una milionèsima part de mil·límetre, és a dir, sempre podríem agafar un regle més petit, de tal manera que la precisió augmentaria. En conclusió, si la longitud del metre tendeix a 0, en el límit, la mesura de la costa serà ∞ .

Amb aquest exemple vull fer veure que realment la naturalesa no està composta per línies rectes, cercles perfectes, etc, sinó que està plena de irregularitats. Aquestes irregularitats no es contemplen a l'hora de descriure un element real mitjançant la geometria tradicional, però, en canvi, gràcies a la geometria fractal, és possible comprendre d'una forma més precisa el que ens envolta. Per això, es pot dir que el plantejament d'aquest nou model geomètric ha suposat un abans i un després a l'hora de mesurar el món.

II.5 BREU HISTÒRIA DE LES FRACTALS

Tot i que les teories fractals han aparegut recentment (no fa més de tres dècades) abans d'aparèixer els ordinador ja existien indicis d'aquest tipus de coneixement. Per ser més concrets, el primer matemàtic relacionat amb el món de les fractals va ser Felix Hausdorff (1868-1942). Aquest matemàtic alemany va ser el precursor de la geometria fractal i, a l'hora, l'impulsor de la topografia moderna. Hausdorff va idear un mètode per poder mesurar les dimensions i mesures de les fractals (encara que aleshores no se sabia de l'existència de les fractals, sinó que se les tractava com a curiositats). Després d'haver investigat sobre geometria no euclidiana, nombres complexos y probabilitat, Felix Hausdorff es va interessar per la Teoria de Conjunts de Georg Cantor, fet que el va inspirar. El 1919, Hausdorff va revolucionar el concepte de dimensió fins llavors, va introduir la noció de dimensió fraccionària.

El 1918, Gastón Julia (1893-1978) va publicar un article de 199 pàgines a la revista científica *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* un informe elaborat mentre ell estava a l'hospital sobre iteració de funcions complexes (del tipus Z^2+C , on C és una constant complexa). En el treball de Julia, es mostrava un dels fractals més coneguts; el conjunt de Julia.

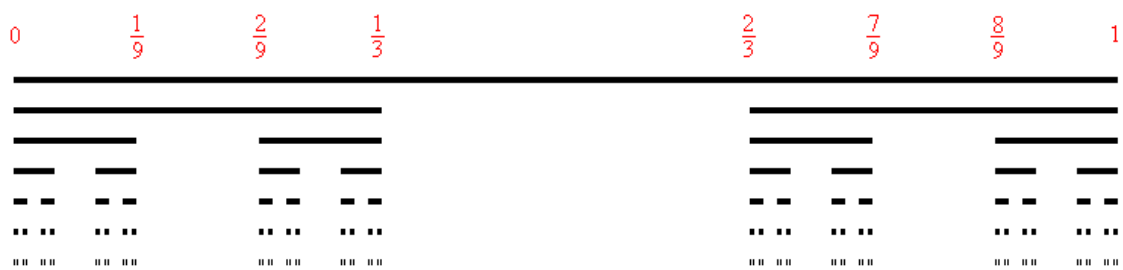
Més tard, el 1963, el meteoròleg Edward Lorenz (1917-2008), va introduir el concepte de caos matemàtic. El famós "Efecte papallona" va ser proposat per aquest científic al veure que qualsevol petit canvi introduït en les condicions inicials per a predir el temps futur canviava radicalment els resultats obtinguts.

Aquests van ser els antecedents abans de que Benôit Mandelbrot establís definitivament la geometria fractal. A partir d'aquest fet, el món de les fractals va experimentar un creixement esperat a causa del gran interès que despertava.

Va ser a l'empresa IBM¹⁵ on va sorgir la teoria de la geometria fractal. Els tècnics de comunicacions de la companyia tenien un gran problema a la seva xarxa d'ordinadors: hi havia unes interferències en les línies telefòniques que

¹⁵IBM és l'acrònim d'International Business Machines. És una empresa d'informàtica, radicada als Estats Units, que treballa en el món de la informàtica des dels seus diferents vessants (maquinaria, programari, sistemes operatius i serveis diversos).

feien servir per comunicar els seus ordinadors. Aquestes interferències no desapareixen per molt que amplifiquessin la senyal i, per tant, els errors eren continus. Mandelbrot¹⁶ (1924-2010) es va assabentar d'aquest problema i va idealitzar un mètode que descrivia la distribució errònia del flux de informació. De fet, encara que hi haguessin períodes de interferències, sempre hi havia períodes on la informació es traspassava sense cap error. Al intentar representar gràficament aquest model, Mandelbrot es va adonar que els errors, aparentment desordenats en les línies d'informació d'IBM, recordaven al conjunt de Cantor.



A partir d'aquest fet, Mandelbrot va adonar-se'n de la importància que tenia el seu descobriment. Es va adonar que la seva investigació, aplicada a altres camps, podia superar a la geometria ortodoxa (euclidiana). De fet, abans d'ell, altres matemàtics ja ho havien intuït, l'avantatge de Mandelbrot era que tenia a l'abast tants ordinadors com necessités, ja que treballava a l'IBM.

A mesura que avançaven les seves investigacions, Benoît Mandelbrot es va plantejar una pregunta que exemplifiqués els seus dubtes. Per això, va publicar un article el 1967 que portava per títol *Quan mesura la costa de Bretanya?*

Mandelbrot va afirmar que la costa de la Bretanya era infinita. Aquesta resposta va sobtar en el món científic ja que s'oposava radicalment a tot mètode geomètric imposat fins el moment. Però Mandelbrot ho va justificar dient que, com més petit és el metre utilitzat per a mesurar la longitud, més sortints i

¹⁶Va néixer a Varsòvia (Polònia) en una família jueva d'origen lituà, però la seva família es va traslladar a França quan tenia 11 anys on va estudiar i va ser deixeble de Gaston Julia. Els darrers anys de la seva vida vivia treballava als Estats Units i tenia doble nacionalitat, francesa i americana. Era professor emèrit de la Yale University, del Thomas J. Watson Research Center i del Pacific Northwest National Laboratory. També col·laborava amb l'empresa informàtica IBM.

entrants es mesuraven, per això, si la longitud del metre tendia a 0, la longitud del perfil de costa havia de ser ∞ .¹⁷

A partir d'aquí, Mandelbrot va començar a crear un model geomètric diferent al tradicional (geometria euclidiana). Per a poder referir-se a aquestes figures que anteriorment s'havien tractat com meres curiositats (ja que no responien al model geomètric d'*Euclides*), va elaborar un nou mot; Fractal. El terme "fractal" va ser inventat per Benôit Mandelbrot al intentar fusionar dues paraules provinents del llatí, *fractus* (trancar) i *fractura* (fractura). Amb això, Mandelbrot volia crear una paraula amb doble funció; substantiu i adjectiu.

El 1977 va publicar la seva obra on exposava la seva teoria sobre les figures fractals, anomenada *Fractals: Form, Chance and Dimension* (Mandelbrot, 1977). Més tard va publicar *The Fractal Geometry of Nature* (Mandelbrot, 1977, 1982, 1983), on va desenvolupar el mètode de la geometria fractal.

Seria convenient destacar que el senyor Benôit Mandelbrot va morir el passat 14 d'octubre de 2010, amb l'edat de 85 anys a causa d'un càncer de pàncrees. La seva implicació en el món de les matemàtiques va ser tan gran que fins i tot el matemàtic Heinz-Otto Peitgen ha dit "si parlem de impactes dins les matemàtiques i aplicacions en les ciències, ell és una de les figures més importants dels últims 50 anys."

Finalment acabo aquest apartat amb una cronologia dels científics més importants i les seves fites relacionades amb les fractals.

Nom conegut (Nom complet)	Fites aconseguides
Weierstrass (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass) (1815-1897)	Va definir la primera corba continua no diferenciable.
Cantor (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor) (1845-1918)	Va establir una successió de segments coneguda com "conjunt de Cantor".
Lyapunov (Aleksandr Mikhailovich Lyapunov) (1857-1918)	Va obrir el camí per a l'estudi de sistemes dinàmics.

¹⁷ Aquest exemple de Mandelbrot està explicat més àmpliament en l'apartat de Geometria fractal

Peano (Giuseppe Peano) (1858-1932)	Va dissenyar un corba que passa per tots els punts del pla.
Sierpinski (Waclaw Sierpinski) (1882-1969)	Va descobrir el triangle de Sierpinski, una de les fractals més conegudes.
Koch (Niels Fabian Helge von Koch) (1815-1897)	Va descobrir la corba de Koch.
Julia (Gaston Maurice Julia) (1893-1978)	Va ser el primer en estudiar la iteració de funcions racionals.
Mandelbrot (Benôit Mandelbrot) (1924 - 2010)	Va ser el gran impulsor de la <i>matemàtica fractal</i> , ajudat per ordinadors. Va crear el concepte <i>fractal</i> y també se li atribueix el fet de ser el “pare” de la geometria fractal.

III.0 INTRODUCCIÓ A LA PART PRÀCTICA

Aquesta part pràctica del treball està destinada a l'aplicació dels conceptes que he après durant la recerca d'informació sobre el món de les fractals. El que pretenc en aquest apartat és fer ús de les eines que he explicat anteriorment per tal de determinar la dimensió fractal del Cap de Creus, més concretament del perfil de costa del Cap de Creus. Per poder fer-ho, utilitzaré el mètode del Box Counting aplicat a mapes aeris del Cap de Creus.

Quan em vaig plantejar enfocar la part pràctica cap a l'anàlisi de la dimensió fractal del Cap de Creus, se'm van presentar dues opcions, fer-ho informàticament o manualment. És a dir, podia aplicar el mètode del *Box Counting* mitjançant imatges i programes informàtics, o, per contra, podia fer-ho amb un mapa imprès i aplicar el *Box Counting* mitjançant fils. Vaig decidir fer-ho informàticament per les avantatges que comportava: més precisió, menys possibilitats d'error, més senzillesa, etc. Per això, durant el procés pràctic, intervé la utilització de diversos programes informàtics, ja siguin lectors de mapes, editors d'imatges o programes especialitzats en l'anàlisi fractal d'imatges. Entre tots aquests programes cal destacar els següents:

- *LizardTech GeoViewer 4.1*
- *Adobe© Photoshop© CS2*
- *ImageJ* amb l'extensió *FracLac*

El procés pràctic consta de tres parts destacades:

1. **Obtenció de mapes.** En aquest primer apartat, s'explica d'on s'han obtingut els mapes utilitzats.
2. **Preparació de la imatge.** En aquest segon apartat, s'explica el procés seguit per tal de preparar la imatge aèria del Cap de Creus de tal manera que el programa, utilitzat per a analitzar-la, pugui reconèixer clarament el perfil i el marge d'error sigui mínim. S'explica el procés seguit de la transformació de la imatge en color fins a la imatge binària.

- 3. Càlcul de la dimensió fractal.** En aquest últim apartat, s'explica com s'utilitza el programari que analitza la imatge i que n'extreu els resultats.

Finalment, també cal esmentar que, a part d'explicar el procés seguit, vull fer veure al lector/lectora que el món de les fractals no és només un àmbit d'estudi matemàtic, sinó que al món natural també hi podem trobar estructures de naturalesa fractal, com és en aquest cas la geografia del litoral català.

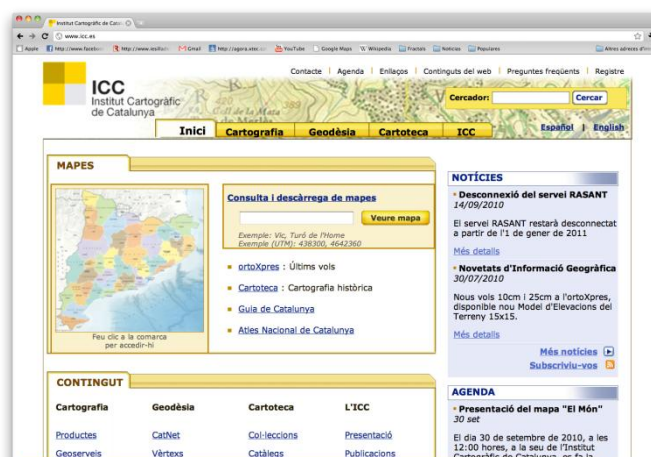
III.1 OBTENCIÓ DE MAPES

Primerament, cal dir que en aquesta fase del procés també se'm van presentar dues opcions a l'hora d'obtenir la cartografia desitjada. Primerament vaig pensar en posar-me en contacte amb l'ICC¹⁸ per tal d'obtenir mapes en format paper, amb la intenció d'escanejar-los posteriorment. Però, al fer recerca per Internet, vaig descobrir que al lloc web oficial del ICC (<http://www.icc.cat/>) oferien gran varietat de mapes a diferents escales i amb fàcil obtenció, per aquest motiu vaig decidir triar aquesta opció. Cal dir que d'aquesta manera, el procés és més senzill, més precís i menys laboriós que no fer-ho amb mapes en format paper.

Un cop aclarit el perquè de l'elecció del format digital, passem a explicar aquesta primera fase d'obtenció de mapes.

Òbviament, per poder calcular la dimensió fractal informàticament d'una figura necessitem la imatge desitjada en format digital. En aquest cas concret, necessitem un mapa aeri del Cap de Creus, i com més definició tingui la imatge, més precisió tindrà l'estudi. Per aquest motiu és una bona elecció obtenir els mapes directament de l'ICC. Per obtenir els mapes cal seguir aquests passos senzills:

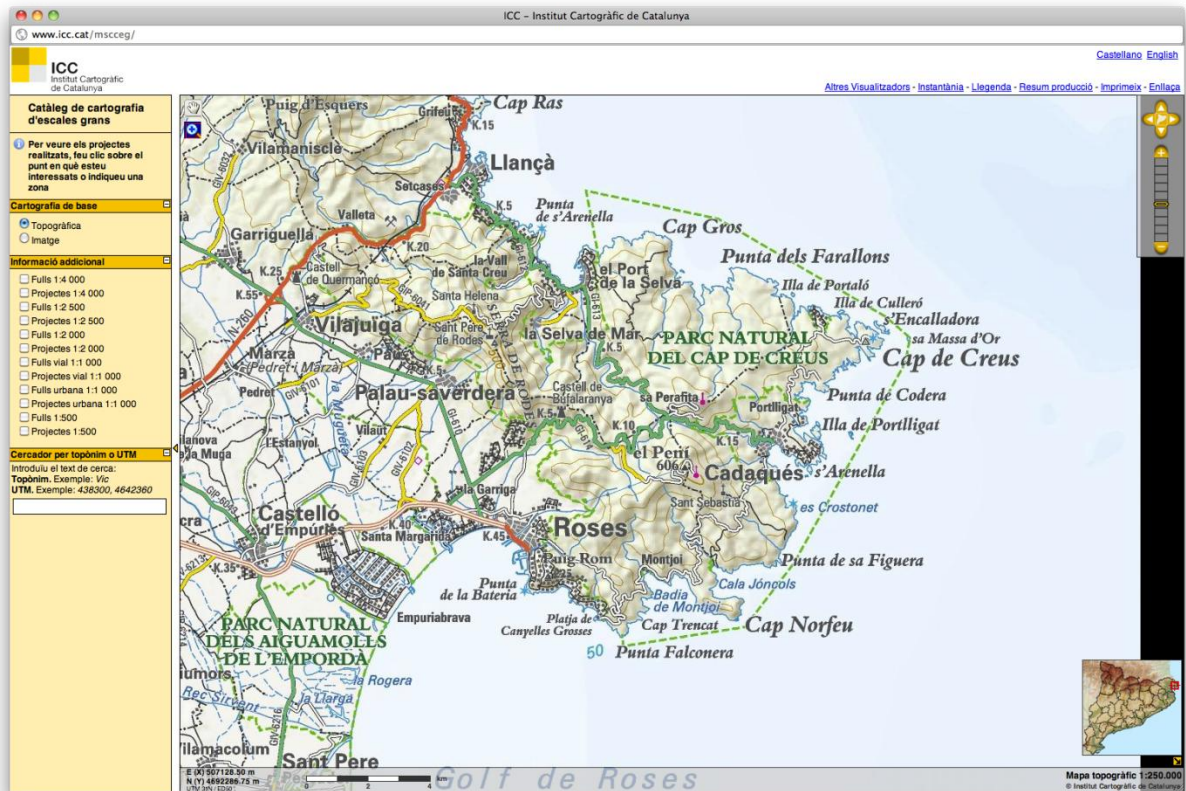
1. Entrar al lloc web del ICC.



Pàgina d'inici del lloc web del ICC (www.icc.cat)

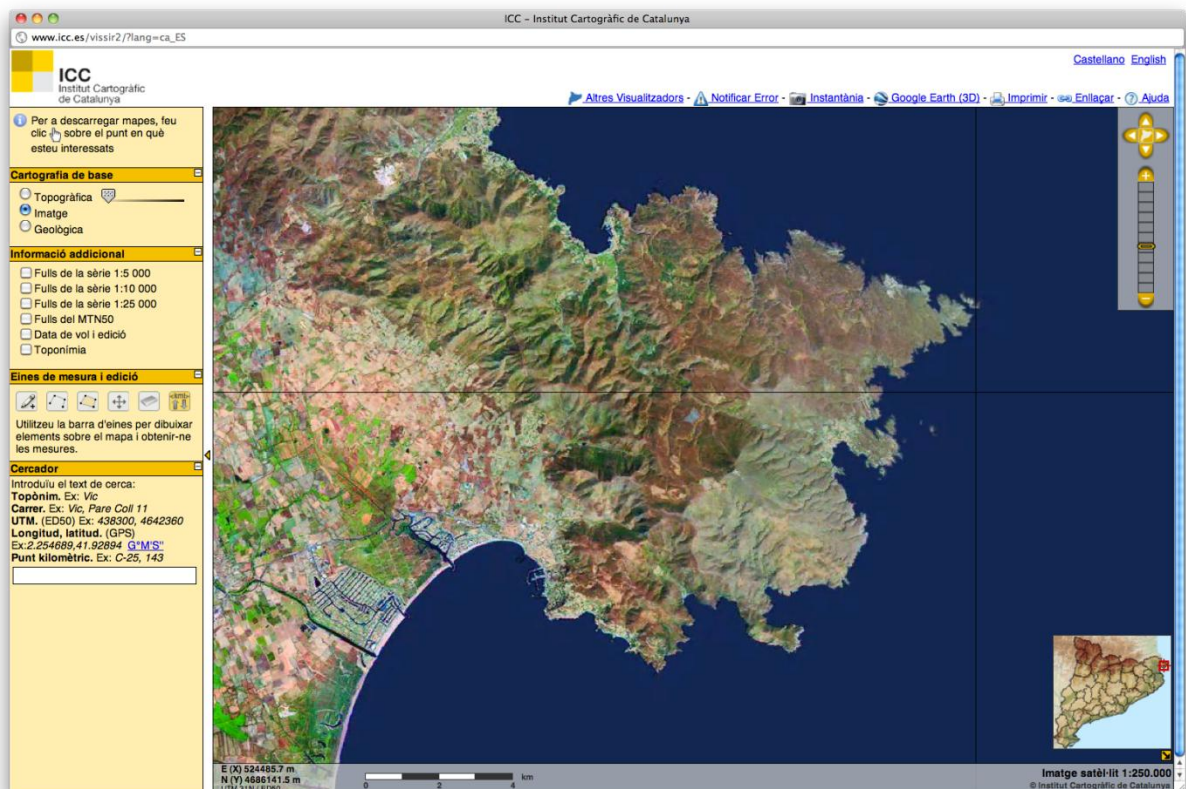
¹⁸ Institut Cartogràfic de Catalunya: entitat de la Generalitat de Catalunya, creada el 1982, que té com a finalitat dur a terme les tasques tècniques de desenvolupament de la informació cartogràfica en l'àmbit de les competències de la Generalitat.

2. Ens dirigim cap a l'apartat d'obtenció de mapes (http://www.icc.cat/vissir2/?lang=ca_ES)



Mapa cartogràfic on-line disponible a [icc.cat](http://www.icc.cat)

3. A la barra de menú que es troba a l'esquerra, dins l'apartat de "cartografia base", marquem la casella de la **Imatge**. Amb això aconseguim veure els mapes com a fotografies aèries, que es el que ens interessa.



Mapa cartogràfic on-line disponible a [icc.cat](http://www.icc.cat) en el mode Imatge (fotografies aèries)

4. En la mateixa barra de menú de l'esquerra seleccionem l'opció "Fulls de la sèrie 1:10.000". D'aquesta manera podrem veure els mapes que estan disponibles en aquesta escala. Hi ha diferents escales per a poder escollir, jo, en aquest cas concret, he cregut oportú escollir aquesta ja que la proporció que té és la més adequada per tal de cobrir la zona del Cap de Creus.



Mapa on-line de ICC amb l'opció "Fulls de la serie 1:10.000" activada

Un cop escollits els mapes corresponents, els descarreguem al nostre ordinador. Llavors, el que tindrem serà un munt d'arxius de les diferents parts del mapa que volem, per això el que necessitem és un editor de mapes cartogràfics, per ordenar-los.

Buscant per la xarxa vaig trobar un programa (*GeoViewer 4.1* de la companyia informàtica *LizardTech*), que permet carregar imatges cartogràfiques del tipus *Mr.SID*¹⁹ i les uneix segons la seva posició geogràfica, per tal d'obtenir un sol mapa de grans dimensions.

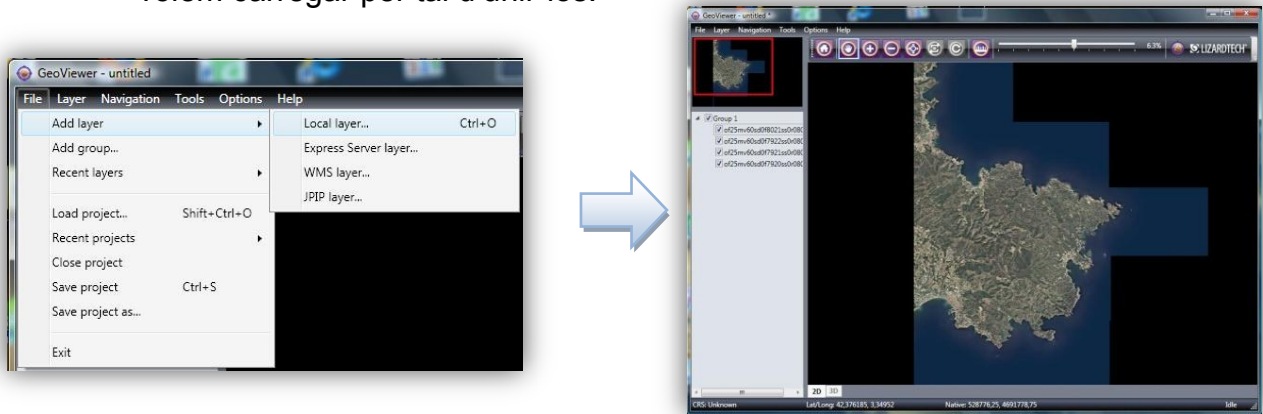


Finestra d'inici de LizardTech Geoviewer 4.1

¹⁹ Imatge creada mitjançant un sistema de compressió anomenat Multi-resolution Seamless Image Database (MrSID), que ha estat desenvolupada per LizardTech amb la finalitat de comprimir grans imatges; normalment es fa servir per a la partició i emmagatzement de grans imatges del tipus Geographic Information Systems (GIS).

El procés que s'ha de fer per poder obtenir una imatge a partir dels diferents "trossos" de mapes unificats és el següent:

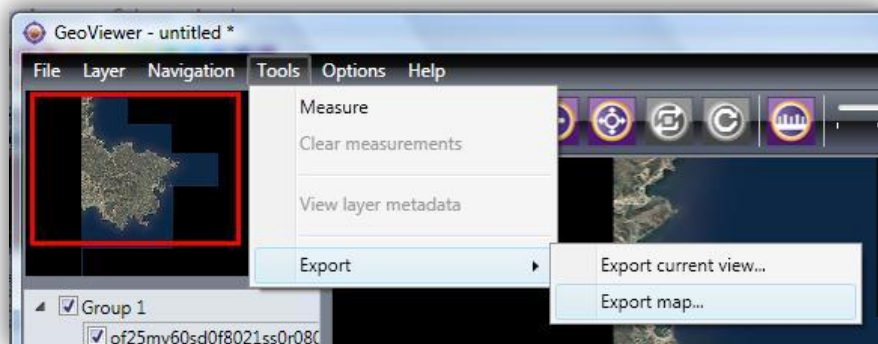
1. Un cop hem instal·lat el programa *GeoViewer 4.1*, l'obrim. A la barra de menú superior seleccionem *File / Add layer / Local layer*. D'aquesta manera se'ns obrirà una finestra a on podem seleccionar els mapes que volem carregar per tal d'unir-los.



Primera etapa de la creació de la imatge aèria del Cap de Creus:

Seleccionar els diferents mapes obtinguts

2. Al tenir els diferents mapes carregats al programa i ordenats segons la seva posició geogràfica, hem d'exportar aquest arxiu en forma d'imatge, per poder editar-la més tard. Per poder aconseguir-ho l'únic que hem de fer és seleccionar *Tools / Export / Export map*.

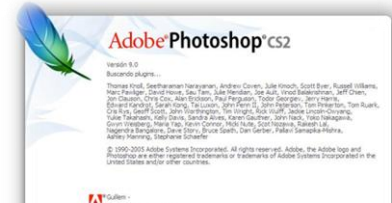


Segona etapa de la creació de la imatge aèria del Cap de Creus: Exportar mapa en format d'imatge

Un cop realitzada aquesta part del procés, el que obtindrem serà la imatge aèria del Cap de Creus amb una gran definició. D'aquesta manera, se'ns obra la possibilitat de poder retocar la imatge per tal de poder analitzar-la més tard correctament, minimitzant els errors. El nostre objectiu és obtenir només el perfil de la costa del Cap de Creus.

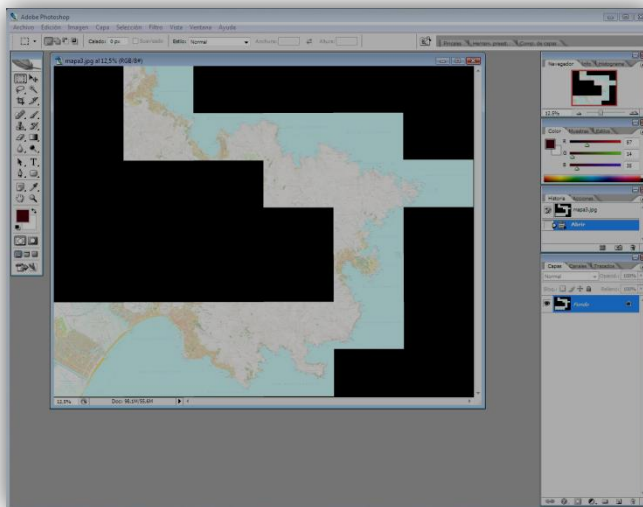
III.2 PREPARACIÓ DE LA IMATGE

En aquest apartat del procés, l'objectiu principal és obtenir una imatge ben definida de la costa del Cap de Creus a partir del mapa obtingut en l'apartat anterior. Inicialment partim d'una imatge aèria en color, i, mitjançant el següent procés, pretenem obtenir una imatge binària²⁰, amb el fons negre i el perfil de la costa de color blanc. Per a poder obtenir la imatge desitjada, el primer pas que vaig fer va ser usar un programa de retoc d'imatges, el *Photoshop*® CS2 de Adobe®

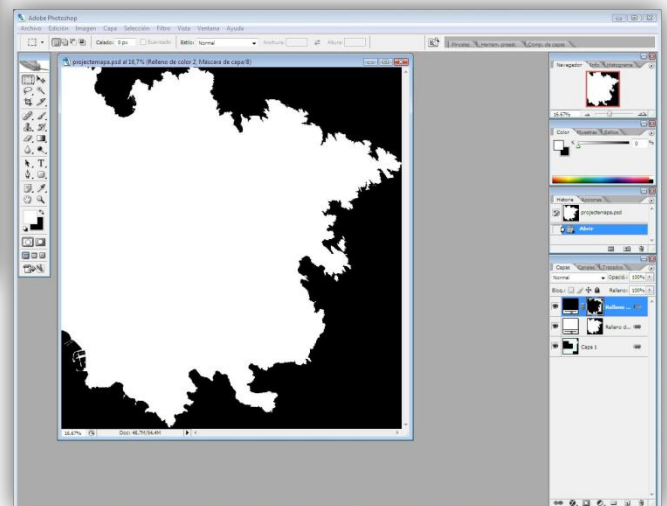
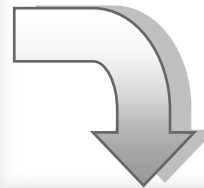


Finestra inicial al obrir *Adobe Photoshop*® CS2

No he cregut convenient explicar tot el procés d'edició de la imatge ja que no està relacionat directament amb la temàtica en si del treball. Però, a grans trets, el que vaig fer va ser transformar la imatge real en una imatge en blanc i negre, on la part terrestre era de color blanc i el mar de color negre. Aquí en podem veure les imatges de l'inici i el final de l'edició:



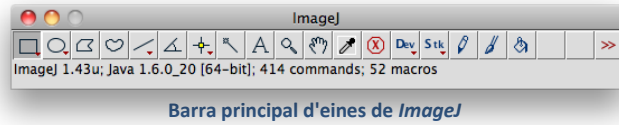
Imatge aèria del Cap de Creus abans de ser editada



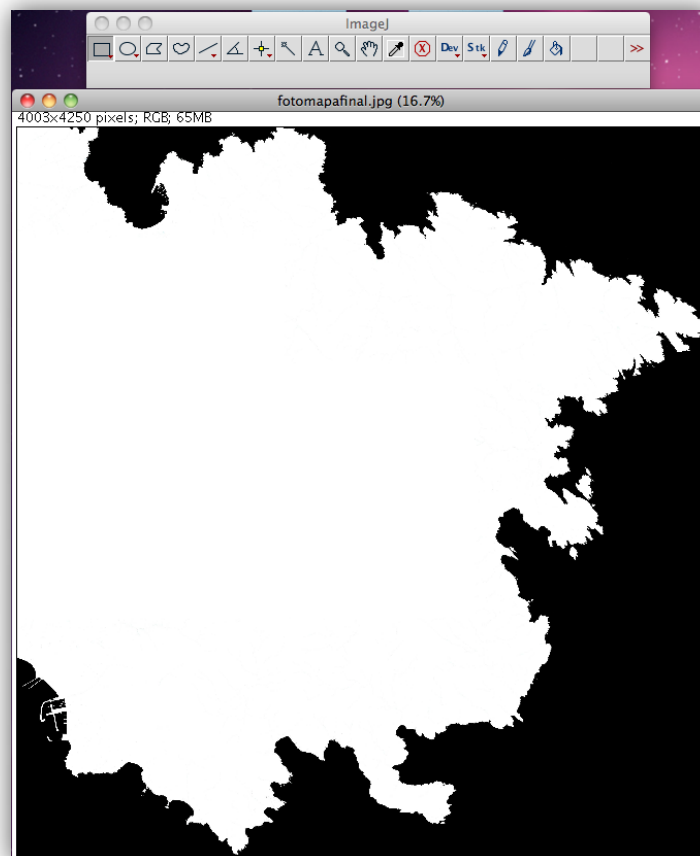
Imatge aèria del Cap de Creus després de ser editada

²⁰ Imatge digital que només té dos valors possibles per a cada píxel. Els dos colors utilitzats normalment són el blanc i el negre, encara que també es poden trobar amb altres colors. Un d'aquests dos colors representa la figura que es vol representar mentre que l'altre actua de fons.

Una vegada hem obtingut la imatge en blanc i negre, falta transformar-la en una imatge on el fons sigui negre i el perfil de color blanc. Per poder-ho fer, utilitzarem un programa que més tard ens servirà per calcular la dimensió fractal de la figura. Aquest programa s'anomena *ImageJ*, i com que és de codi obert, en permet instal·lar fàcilment *plugins*²¹. L'*ImageJ* és un editor d'imatges, però amb la peculiaritat que també les pot analitzar, segons els connectors que hi tingui adherits. Per aquest motiu, té moltes eines que per editar imatges no tenen gaire sentit, però a l'hora d'analitzar-les tenen una gran utilitat. Una d'aquestes eines serveix per poder extreure només el perfil d'una imatge. El procés per a fer-ho és el següent:



1. Obriem *ImageJ* i carreguem la imatge en el programa simplement arrossegant-la fins a la barra de menú.

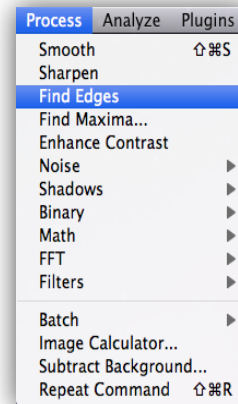


Imatge en blanc i negre carregada al programa ImageJ

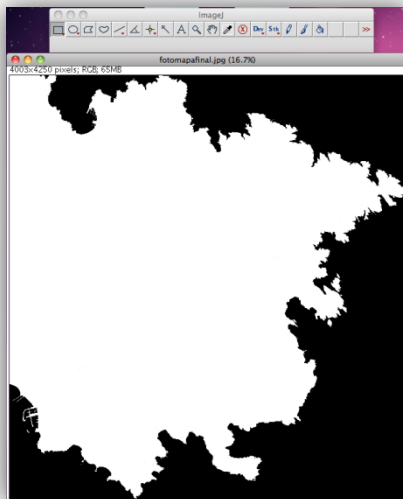
²¹ Un **connector** o **plugin** és una aplicació informàtica que interactua amb una altra aplicació per aportar-li una funció o utilitat addicional, generalment molt específica.

2. Per poder obtenir només el perfil de la costa, hem d'utilitzar l'eina de *Find Edges*. Per poder activar-la, hem de fer el següent; a la barra de menú seleccionem *Process / Find Edges*.

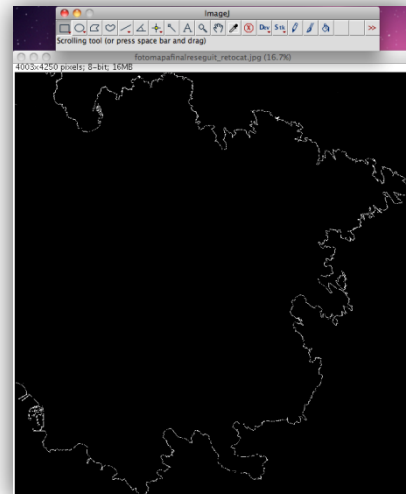
Itinerari per a poder activar la
funció *Find Edges*



A continuació, la imatge s'haurà transformat de la següent manera:

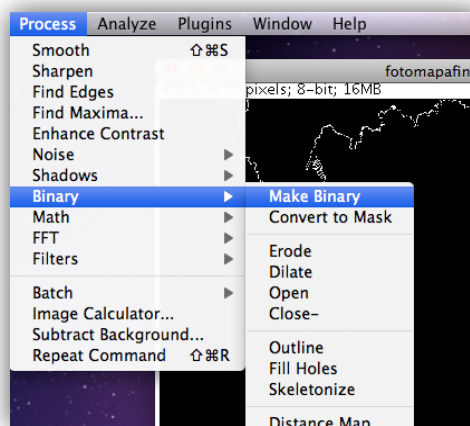


Imatge en blanc i negre abans d'aplicar
l'eina *Find Edges*



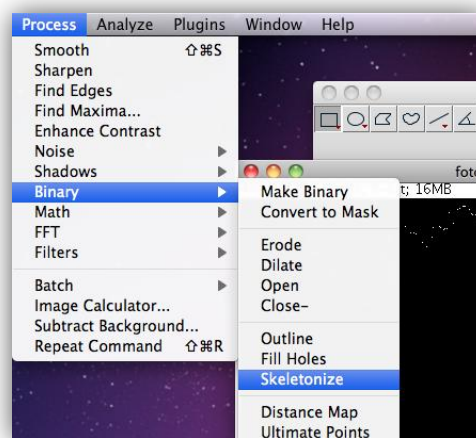
Imatge en blanc i negre després
d'aplicar l'eina *Find Edges*

3. El següent pas és fer passar la imatge que està en blanc i negre, però que realment està en una escala de grisos, a una imatge binària, només blanc i negre. Per fer-ho, també podem utilitzar el programa *ImageJ*, és tan fàcil com seleccionar *Process / Binary / Make Binary*:



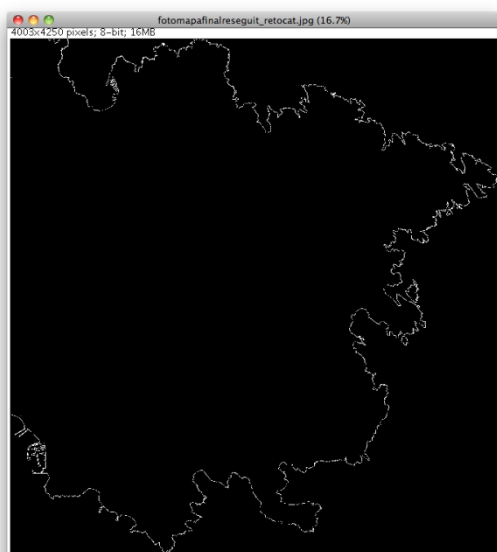
Itinerari per a transformar la imatge a binària

4. En acabar aquest últim pas, podríem donar per finalitzada l'etapa de preparació de la imatge, i així ho vaig fer inicialment. Però, al repassar tots els resultats i processos, em vaig adonar que el perfil de la costa era massa gruixut i modificava notablement els resultats. A mesura que augmentava la divisió de la imatge pel mètode del *Box Counting*, l'error comès augmentava, ja que, l'amplada de la línia de perfil no permetia un major grau de precisió. Per això vaig decidir disminuir el gruix del perfil tan com fos possible. Finalment vaig poder fer-ho amb el mateix programa *ImageJ*, ja que una de les seves eines, anomenada *Skeletonize*, permet reduir el perfil fins al gruix d'un sol píxel. D'aquesta manera, l'estudi guanyava més precisió i les possibilitats d'error disminuïen considerablement. Per poder aplicar aquesta eina és tan senzill com seleccionar *Process / Binary / Skeletonize*:

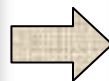


Itinerari per a aplicar l'eina *Skeletonize* del *ImageJ*

Aquí podem veure el canvi de la imatge després d'aplicar aquesta eina:



Imatge abans d'aplicar l'eina *Skeletonize*



Imatge després d'aplicar l'eina *Skeletonize*

III.3 CÀLCUL DE LA DIMENSIÓ FRACTAL

Aquest últim apartat és segurament el més important, ja que, a partir de la imatge obtinguda mitjançant els processos anteriors, en calculem la dimensió fractal del perfil del Cap de Creus. Cal dir que la dimensió fractal d'una figura es pot fer mitjançant diversos mètodes i procediments, però he escollit el Box Counting per la seva senzillesa i prestacions. Aquest mètode permet veure com la dimensió es va precisant a mesura que disminuïm la mesura dels quadrats, i, d'aquesta manera, el lector es dona compte de la variabilitat de l'estudi segons el grau de precisió que s'utilitza.

Per a poder calcular la dimensió fractal del perfil de costa del Cap de Creus he utilitzat el programa anomenat *ImageJ*, que he esmentat en apartats anteriors. Com he explicat abans, aquest programa té la opció de poder-li adherir diferents eines que no té de bon principi. Investigant per la xarxa, vaig trobar una d'aquestes eines capaç de fer un anàlisi de la dimensió fractal d'una imatge. Aquest *plugin* s'anomena *FracLac V2.5*²². Aquesta aplicació ens permet fer un estudi complert, ja que en proporciona multitud de dades relacionades amb l'anàlisi de la imatge. A part de extreure'n la dimensió fractal, que és el que més interessa, ens ofereix altres dades com la dimensió obtinguda a diferents escales d'observació, entre altres.

He cregut que l'explicació de com instal·lar el *FracLac* no té gaire rellevància dins el treball, ja que a la web oficial està ben explicat. Però, el procés és tan senzill com descarregar l'arxiu comprimit (proporcionat a la web) i descomprimir-lo dins la carpeta a on s'ha instal·lat l'*ImageJ*. Cal mencionar que existeix un lloc web a on hi ha explicat detalladament tot el funcionament d'aquesta eina, des de d'instal·lació fins a la utilització;

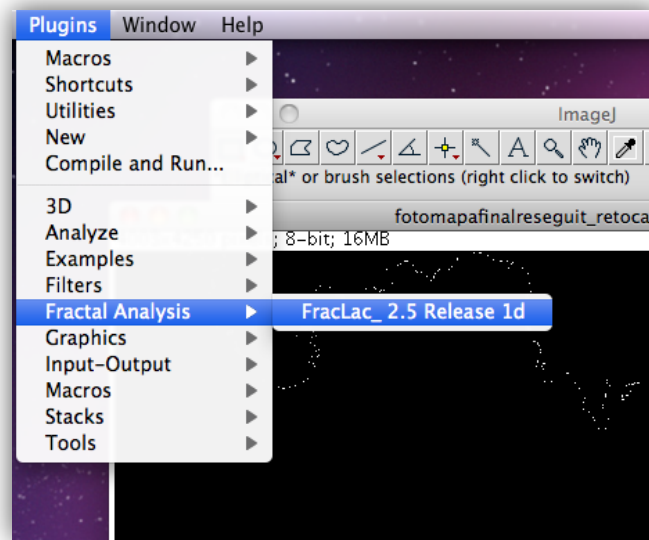
<http://rsbweb.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/Introduction.htm#intro>

El primer cop que investiguem sobre aquest *plugin* podrem comprovar que té multitud de funcions i opcions a les quals escollir. Això es deu a que aquesta eina és capaç de calcular molts aspectes, com multi-fractals, lacunaritat, etc.

²² Plugin creat per A. Karperien (Charles Sturt University, Australia), que permet quantificar el grau de complexitat de la morfologia d'una imatge (binària o en escala de grisos) mitjançant el càlcul de la seva dimensió, entre altres. El lloc web oficial és <http://rsb.info.nih.gov/ij/plugins/fraclac/fraclac.html>

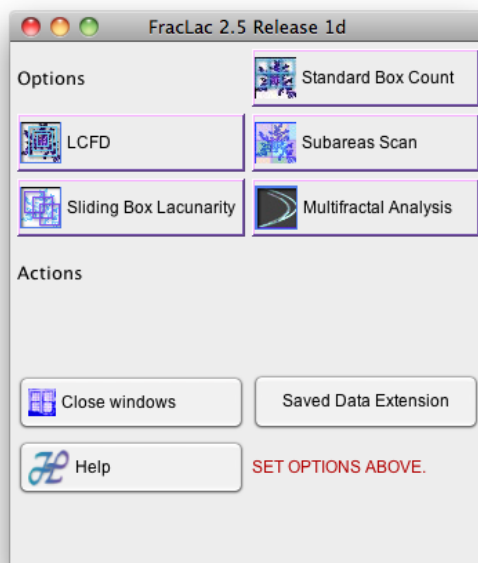
El procés per a poder calcular la dimensió fractal mitjançant l'eina *FracLac* és molt senzill. Suposant que tenim la imatge, obtinguda en els apartats anteriors, carregada al programa *ImageJ* i amb la eina *FracLac* instal·lada, procedim a analitzar-la:

1. Activem l'eina *FracLac*. Al menú de *ImageJ* seleccionem *Plugins / Fractal Analysis / FracLac_2.5*.

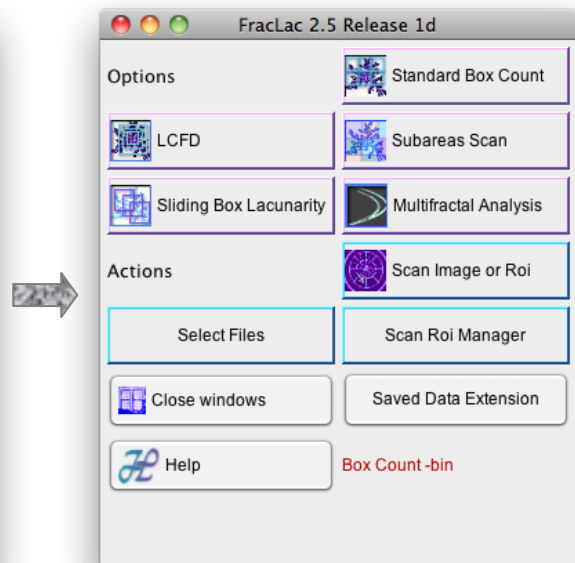


Selecció de l'eina *FracLac* en el programa *ImageJ*

2. Un cop hem activat aquesta eina se'ns obrirà una finestra a on podem escollir diferents opcions, per a poder calcular la dimensió fractal tal i com volem, hem de seleccionar *Standard Box Count*

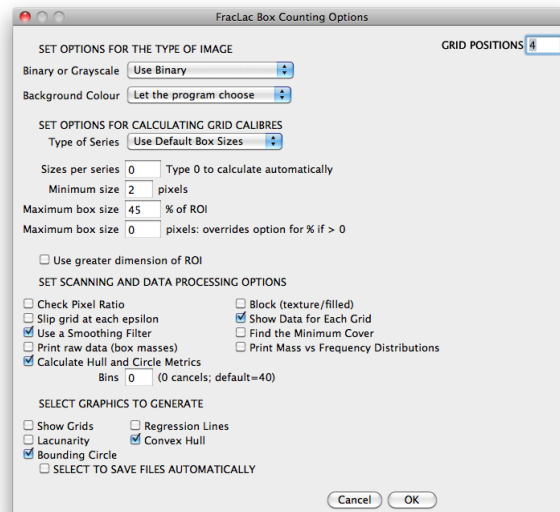


Finestra inicial de l'eina *FracLac*



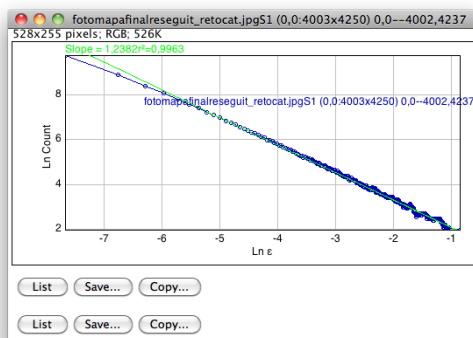
Finestra inicial de l'eina *FracLac* amb l'opció *Standard Box Count* seleccionada

3. Tot seguit, seleccionem l'opció *Scan Image or Roi*. Llavors, ens apareixerà una finestra on haurem de seleccionar les opcions sobre com volem que calculi la dimensió fractal. L'únic paràmetre que hem de modificar és el de *GRID POSITIONS*, el qual canviarem el valor de 4 a 1. Aquest paràmetre indica el nombre de vegades que analitza la imatge segons la seva posició, és a dir, enlloc de calcular quatre cops la dimensió fractal des de quatre posicions diferents, ho farà des d'una sola.



Finestra d'opcions de l'eina *FracLac* en el mode *Standard Box Count*

4. A continuació, una vegada configurats tots els paràmetres, iniciem el procés de càlcul de la dimensió fractal seleccionant "OK". Aquest procés pot tardar uns minuts. Un cop obtinguts els resultats, podem veure que estan organitzats en taules diferents, però les que a nosaltres ens interessa és la titulada *Data*. En aquesta taula estan incloses dades com la dimensió fractal, el coeficient de correlació, l'error estàndard, etc. També hi ha tots els valors obtinguts segons l'escala d'observació utilitzada, i les seves gràfiques corresponents.



Gràfic obtingut a partir dels resultats ($\ln N_\epsilon / \ln \epsilon$)

File+ Slice (ROI location(x,y): width x height) GRID	Fractal Dimension (D)=regressio
fotomapafinalreseguit_retocat.jpgS1 (0,0:4003x4250) 0,0--4002,4237	1,2382
Slopes for Data	
Box Size1	ϵ 1
1	1
DATA	
Box Size1	ϵ =Box Size/Image Dimension1
2	0,0005
5	0,0012
8	0,0019
11	0,0026

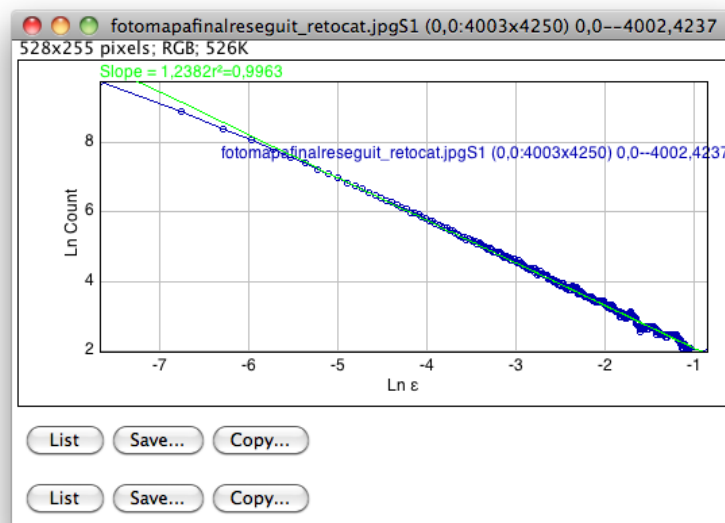
Taula de resultats obtinguts en l'anàlisi de l'eina *FracLac*

III.4 ANÀLISI DELS RESULTATS

Un cop hem realitzat tot el procés, obtindrem una sèrie de resultats, com he dit abans, organitzats en taules²³. La taula més important és la que es titula *Data*.

Primerament, cal destacar els resultats referents al nombre de “caixes” comptades segons la mida del seu costat i el nombre de “caixes” totals en que s’ha dividit la imatge. Les mides dels costats de les caixes varien des de 2 unitats fins a 1800, i els resultats de caixes comptades varien des de 17654 fins a 7 de forma inversament proporcional. Es veu clarament que com major es la mida del costat de les caixes, menor es el nombre de caixes on hi ha part de la figura, i a l’inrevés.

Seguidament cal destacar sobretot el valor de la dimensió fractal, que en aquest cas és de 1.2382. Aquest valor coincideix amb la pendent de la recta de regressió (en valor absolut) formada per tots els valors de la gràfica $\ln(N_\epsilon) / \ln(\epsilon)$. La gràfica és com la següent:



Gràfica formada pels valors de $\ln(N_\epsilon)$ i $\ln(\epsilon)$

Els valors corresponents al logaritme de $\ln(N_\epsilon)$ respecte el $\ln(\epsilon)$, estan marcats com a punts de color blau, i la recta de regressió formada per aquests valors està marcada en color verd. La pendent d'aquesta recta és de **1,2382**, que correspon amb la dimensió fractal de la línia de costa del Cap de Creus.

²³ La taula de resultats estan disponibles a l'annex B.

IV. CONCLUSIONS

Com he dit a la introducció del treball, el meu principal objectiu era trobar el valor de la dimensió fractal de la costa del Cap de Creus. Després de tot el procés descrit durant el treball l'he trobada. La dimensió fractal de la costa del Cap de Creus és **1,2382**. Com era d'esperar no coincideix amb un nombre enter, sinó que és de caràcter fraccionària. Per tant, podem afirmar que la costa del Cap de Creus és de naturalesa fractal ja que la seva dimensió fractal és major a la seva dimensió topològica. Una altre fet que en podem deduir d'aquesta dada és que la figura del Cap de Creus no té un perfil simple (com les figures euclidianes), sinó que, com ho fan els fractals, manté un grau de complexitat en totes les escales d'observació. Com que la dimensió és 1,2382 podem dir que la complexitat és moderada ja que, com més gran és la dimensió, més complexitat.

A part d'assolir l'objectiu plantejat inicialment, crec que també s'ha complert a l'hora de introduir a el/la lector/a dins el món de les fractals. He explicat conceptes bàsics necessaris per tal de comprendre la teoria de les figures fractals (dimensió fractal, geometria fractal, *Box Counting*). Al mateix temps he descrit breument l'evolució de la història de la geometria fractal, i he explicat el perquè de l'aparició d'un nou model geomètric.

A més a més, s'ha demostrat que l'estudi de la geometria fractal no és només una teoria plantejada d'àmbit matemàtic, sinó que actualment s'està aplicant a multitud de camps amb resultats mai vistos. També s'ha explicat com Mandelbrot ha revolucionat la manera d'entendre la realitat i els objectes que la conformen. S'ha introduït conceptes com el de caos, la complexitat a qualsevol escala d'observació, i molts altres. Aquests conceptes no van aparèixer fins fa quatre dècades, per això podríem dir que encara estan en la seva fase de maduració.

Finalment, crec que he fet veure a el/la lector/a que el món de les fractals és més present a les nostres vides del que ens pensem. Potser no en donem molta importància, però, gràcies a aquesta teoria, els avenços tecnològics han avançat superant les previsions proposades fa quatre dècades enrere.

V. REFERÈNCIES

Bibliografia

- Mandelbrot, Benoit B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman.
- Mandelbrot, Benôit B. (1997). *La Geometria Fractal De La Naturaleza*. 1 ed. Barcelona: Tusquets.
- Xambó Descamps, Sebastià. *Geometría*. (1997) Barcelona: Edicions UPC
- Mandelbrot, Benôit, i Richard L.Hudson (2006). *Fractales Y Finanzas*. Barcelona: Tusquets.

Webgrafia

- <http://ca.wikipedia.org/wiki/>
- <http://classes.yale.edu/fractals/Labs/CoastlineLab/CoastlineLab.html>
- <http://hypertextbook.com/chaos/33.shtml>
- <http://polymer.bu.edu/ogaf/>
- <http://rsbweb.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/Introduction.htm>
- <http://www.armoniafractal.com/>
- <http://www.cientec.or.cr/matematica/fractales.html>
- <http://www.edu365.cat/batxillerat/comfer/recerca/>
- <http://www.icc.cat/>
- <http://www.iec.cat>
- <http://www.xtec.es/ieslabisbal/fractals/intro.htm>
- Buscador d'imatges de <http://www.google.es>

Conferències

Conferència inaugural de l'exposició *Armonia fractal de Doñana y las Marismas*, 7 de maig de 2010, "El cortalet", Parc Natural dels Aiguamolls de l'Empordà (Girona)

"Descobreix els fractals" , 13 de juny de 2010, "El cortalet", Parc Natural dels Aiguamolls de l'Empordà (Girona)

Articles

- http://www.elpais.com/articulo/sociedad/Fallece/Mandelbrot/padre/fractales/elpepusoc/20101018elpepusoc_6/Tes

VI. ANNEXOS

ANNEX A; IMATGES

Imatge 1



Fulla de falguera amb estructura de naturalesa fractal

Imatge 2



Estructura DLA generada per una solució de sulfat de coure en una cèl•lula de electrodepositació

ANNEX B; RESULTATS

Taula Data

R^2 ²⁴	Std Error ²⁵	Dimensió Fractal(D) ²⁶
0,9963	0,0751	1,2382

Box Size ²⁷	ϵ ²⁸	Count ²⁹	"Caixes" totals	Std Dev (σ) ³⁰
2	0,0005	17654	4242238	0,516
5	0,0012	7566	679248	1,8628
8	0,0019	4661	265530	3,4066
11	0,0026	3298	140504	5,0436
14	0,0033	2531	86658	6,6645
17	0,004	2024	59000	8,5181
20	0,0047	1687	42612	10,3984
23	0,0054	1424	32375	12,24
26	0,0061	1248	25102	13,9567
29	0,0068	1105	20433	16,3761
32	0,0076	970	16758	18,7513
35	0,0083	881	14030	21,3118
38	0,009	812	11872	23,4283
41	0,0097	716	10192	25,4852
44	0,0104	659	8827	27,9473
47	0,0111	624	7826	29,5046
50	0,0118	570	6885	32,024
53	0,0125	551	6080	35,2349
56	0,0132	509	5472	38,4897
59	0,0139	469	4896	40,2171
62	0,0146	445	4485	42,2384
65	0,0153	411	4092	46,6963
68	0,016	402	3717	49,345
71	0,0168	385	3420	50,5769
74	0,0175	357	3190	53,6243
77	0,0182	342	2912	56,9854
80	0,0189	324	2703	57,9009

²⁴ Coeficient de correlació

²⁵ Error estadístic

²⁶ Dimensió fractal (D) = línia de regressió $[\ln(\text{Count})/\ln(\epsilon)]$

²⁷ Mida del costat de la "caixa" en unitats

²⁸ Proporció en tan per 1 de la mida de les "caixes" respecte a la mida de la imatge

²⁹ Caixes comptades

³⁰ Desviació estadística

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
83	0,0196	320	2548	61,5273
86	0,0203	293	2350	64,0928
89	0,021	282	2160	65,3483
92	0,0217	272	2068	72,5329
95	0,0224	262	1935	77,8533
98	0,0231	258	1804	82,377
101	0,0238	243	1680	82,8831
104	0,0245	239	1599	86,0008
107	0,0253	227	1520	83,6488
110	0,026	218	1443	91,7634
113	0,0267	208	1368	90,164
116	0,0274	203	1295	95,5493
119	0,0281	203	1224	101,0295
122	0,0288	184	1155	102,1144
125	0,0295	192	1122	103,5253
128	0,0302	187	1088	117,982
131	0,0309	175	1023	112,4132
134	0,0316	178	960	117,8836
137	0,0323	167	930	115,8605
140	0,033	172	899	128,1323
143	0,0338	164	840	130,4293
146	0,0345	157	840	142,2805
149	0,0352	154	783	141,6062
152	0,0359	146	756	139,2641
155	0,0366	140	728	148,9086
158	0,0373	145	702	149,5605
161	0,038	140	675	144,1811
164	0,0387	130	650	153,0568
167	0,0394	130	624	154,4572
170	0,0401	129	600	164,4986
173	0,0408	125	600	164,3438
176	0,0415	127	575	163,0525
179	0,0422	124	552	168,9044
182	0,043	116	528	178,8773
185	0,0437	112	506	176,3431
188	0,0444	114	506	168,0972
191	0,0451	113	483	177,6286
194	0,0458	110	462	180,6422
197	0,0465	109	462	177,5821
200	0,0472	104	462	176,4304
203	0,0479	104	420	175,8939
206	0,0486	106	420	172,9797
209	0,0493	106	420	190,0011
212	0,05	97	380	182,7234
215	0,0507	96	380	191,3292
218	0,0515	102	380	215,1867

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
221	0,0522	95	380	203,6637
224	0,0529	93	342	224,1613
227	0,0536	92	342	218,9567
230	0,0543	86	342	214,6193
233	0,055	88	342	217,9674
236	0,0557	84	306	224,709
239	0,0564	81	306	225,7026
242	0,0571	81	306	217,0198
245	0,0578	79	306	232,5993
248	0,0585	82	306	253,2377
251	0,0592	78	272	254,8574
254	0,0599	77	272	255,8636
257	0,0607	82	272	265,5719
260	0,0614	80	272	262,2898
263	0,0621	72	272	249,251
266	0,0628	75	256	264,0131
269	0,0635	73	240	253,7979
272	0,0642	66	240	246,9805
275	0,0649	69	240	269,4488
278	0,0656	74	240	307,2921
281	0,0663	69	240	305,1607
284	0,067	69	225	307,5852
287	0,0677	68	210	310,907
290	0,0684	66	210	319,5859
293	0,0692	66	210	320,7217
296	0,0699	66	210	319,5432
299	0,0706	66	210	331,3852
302	0,0713	66	210	335,3705
305	0,072	60	196	345,4535
308	0,0727	60	182	366,8047
311	0,0734	59	182	369,0337
314	0,0741	59	182	378,8878
317	0,0748	59	182	364,3328
320	0,0755	57	182	339,2185
323	0,0762	58	182	341,4512
326	0,0769	54	169	340,891
329	0,0776	56	169	358,2368
332	0,0784	55	169	373,4011
335	0,0791	53	156	388,0995
338	0,0798	55	156	401,4778
341	0,0805	51	156	375,8603
344	0,0812	51	156	372,3498
347	0,0819	49	156	371,5706
350	0,0826	51	156	398,0726
353	0,0833	52	156	403,8716
356	0,084	52	144	399,0697

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
359	0,0847	53	144	414,9043
362	0,0854	48	144	397,9427
365	0,0861	46	132	387,8554
368	0,0869	47	132	406,3739
371	0,0876	45	132	403,576
374	0,0883	46	132	416,5058
377	0,089	46	132	432,3596
380	0,0897	44	132	444,0154
383	0,0904	46	132	481,5981
386	0,0911	46	121	489,5758
389	0,0918	46	121	470,1953
392	0,0925	44	121	439,7854
395	0,0932	46	121	436,4357
398	0,0939	48	121	452,825
401	0,0946	47	110	447,05
404	0,0954	47	110	433,8502
407	0,0961	45	110	422,7808
410	0,0968	44	110	421,1643
413	0,0975	45	110	429,4268
416	0,0982	45	110	457,5849
419	0,0989	46	110	505,4842
422	0,0996	42	110	502,2019
425	0,1003	40	100	484,2414
428	0,101	38	100	477,939
431	0,1017	39	100	498,7015
434	0,1024	40	100	529,6125
437	0,1031	41	100	540,9275
440	0,1038	42	100	562,7115
443	0,1046	40	100	569,8779
446	0,1053	38	90	559,2144
449	0,106	38	90	571,9526
452	0,1067	37	90	555,9088
455	0,1074	36	90	525,3878
458	0,1081	36	90	513,1958
461	0,1088	35	90	493,176
464	0,1095	35	90	477,1542
467	0,1102	36	90	469,3152
470	0,1109	36	90	472,9604
473	0,1116	35	81	481,6794
476	0,1123	34	81	483,537
479	0,1131	35	81	525,9888
482	0,1138	34	81	533,7469
485	0,1145	35	81	579,4861
488	0,1152	34	81	614,0767
491	0,1159	34	81	646,9041
494	0,1166	34	81	668,943

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
497	0,1173	35	81	691,5174
500	0,118	34	81	700,0802
503	0,1187	32	72	673,8054
506	0,1194	32	72	663,3561
509	0,1201	33	72	667,1932
512	0,1208	33	72	656,685
515	0,1215	32	72	616,0573
518	0,1223	31	72	574,8882
521	0,123	31	72	556,3507
524	0,1237	31	72	532,7686
527	0,1244	32	72	538,4373
530	0,1251	32	64	536,7503
533	0,1258	32	64	539,947
536	0,1265	32	64	540,8527
539	0,1272	32	64	567,3338
542	0,1279	31	64	556,6269
545	0,1286	31	64	558,8831
548	0,1293	31	64	574,1847
551	0,13	31	64	591,6324
554	0,1308	31	64	633,5207
557	0,1315	32	64	680,7416
560	0,1322	32	64	693,9333
563	0,1329	31	64	682,3798
566	0,1336	32	64	688,0392
569	0,1343	31	64	690,7712
572	0,135	28	56	660,1704
575	0,1357	29	56	678,6585
578	0,1364	28	56	661,7614
581	0,1371	28	56	653,0803
584	0,1378	27	56	627,8789
587	0,1385	27	56	636,4539
590	0,1392	27	56	640,546
593	0,14	28	56	667,6453
596	0,1407	26	56	639,6049
599	0,1414	26	56	651,2756
602	0,1421	26	56	667,927
605	0,1428	26	56	686,6929
608	0,1435	25	49	686,041
611	0,1442	26	49	726,5018
614	0,1449	27	49	750,3613
617	0,1456	28	49	758,7983
620	0,1463	27	49	742,087
623	0,147	27	49	742,2418
626	0,1477	27	49	757,3921
629	0,1485	27	49	788,1453
632	0,1492	25	49	739,1375

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
635	0,1499	25	49	732,3469
638	0,1506	25	49	734,1605
641	0,1513	24	49	711,4847
644	0,152	24	49	699,4669
647	0,1527	24	49	695,5757
650	0,1534	24	49	702,2293
653	0,1541	23	49	684,8127
656	0,1548	23	49	705,085
659	0,1555	23	49	732,0555
662	0,1562	23	49	778,2216
665	0,157	23	49	825,3942
668	0,1577	22	42	856,3743
671	0,1584	22	42	881,3423
674	0,1591	23	42	915,7204
677	0,1598	22	42	919,853
680	0,1605	22	42	937,479
683	0,1612	20	42	894,3953
686	0,1619	20	42	914,1439
689	0,1626	21	42	966,4747
692	0,1633	21	42	980,2913
695	0,164	21	42	975,8108
698	0,1647	22	42	1002,2844
701	0,1654	22	42	1008,553
704	0,1662	21	42	983,9349
707	0,1669	20	36	956,1631
710	0,1676	21	36	970,9895
713	0,1683	20	36	931,068
716	0,169	20	36	933,0927
719	0,1697	20	36	926,0825
722	0,1704	19	36	882,4892
725	0,1711	19	36	866,2103
728	0,1718	19	36	859,8392
731	0,1725	19	36	855,6879
734	0,1732	19	36	870,124
737	0,1739	19	36	882,4561
740	0,1747	20	36	936,8246
743	0,1754	20	36	955,2643
746	0,1761	21	36	1007,3793
749	0,1768	21	36	1026,5348
752	0,1775	21	36	1056,5646
755	0,1782	21	36	1099,5371
758	0,1789	21	36	1114,4449
761	0,1796	21	36	1128,681
764	0,1803	23	36	1160,5355
767	0,181	23	36	1173,4739
770	0,1817	22	36	1152,115

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
773	0,1824	21	36	1149,0695
776	0,1831	21	36	1152,9457
779	0,1839	21	36	1144,3961
782	0,1846	20	36	1126,9692
785	0,1853	20	36	1113,1934
788	0,186	20	36	1105,9698
791	0,1867	20	36	1113,4585
794	0,1874	20	36	1126,7646
797	0,1881	20	36	1138,7468
800	0,1888	20	36	1162,8258
803	0,1895	19	30	1141,2195
806	0,1902	19	30	1144,6945
809	0,1909	19	30	1150,6167
812	0,1916	17	30	1102,4659
815	0,1924	17	30	1119,9575
818	0,1931	16	30	1076,7272
821	0,1938	16	30	1088,0549
824	0,1945	16	30	1095,895
827	0,1952	16	30	1124,0469
830	0,1959	16	30	1163,588
833	0,1966	16	30	1214,3331
836	0,1973	16	30	1272,0931
839	0,198	16	30	1309,2943
842	0,1987	15	30	1277,6545
845	0,1994	15	30	1289,1113
848	0,2001	14	25	1203,4076
851	0,2008	14	25	1204,0508
854	0,2016	13	25	1075,5718
857	0,2023	14	25	1172,1199
860	0,203	14	25	1155,2301
863	0,2037	14	25	1149,1498
866	0,2044	14	25	1148,5245
869	0,2051	15	25	1216,7982
872	0,2058	15	25	1182,3047
875	0,2065	15	25	1163,816
878	0,2072	14	25	1053,8477
881	0,2079	14	25	1034,15
884	0,2086	14	25	1011,6964
887	0,2093	14	25	1001,8389
890	0,2101	15	25	1089,9387
893	0,2108	15	25	1074,3474
896	0,2115	15	25	1063,856
899	0,2122	15	25	1049,5767
902	0,2129	15	25	1044,1796
905	0,2136	15	25	1032,0745
908	0,2143	15	25	1029,5563

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
911	0,215	15	25	1026,499
914	0,2157	14	25	903,7035
917	0,2164	14	25	906,6217
920	0,2171	14	25	911,65
923	0,2178	14	25	918,3563
926	0,2186	14	25	928,8106
929	0,2193	15	25	1047,4034
932	0,22	15	25	1050,1456
935	0,2207	15	25	1049,4062
938	0,2214	15	25	1047,9167
941	0,2221	15	25	1081,931
944	0,2228	15	25	1085,84
947	0,2235	15	25	1081,566
950	0,2242	15	25	1092,1738
953	0,2249	15	25	1099,7445
956	0,2256	15	25	1103,0702
959	0,2263	15	25	1121,8622
962	0,227	15	25	1140,7499
965	0,2278	15	25	1157,9762
968	0,2285	15	25	1176,8629
971	0,2292	15	25	1189,0994
974	0,2299	15	25	1215,5558
977	0,2306	15	25	1242,9459
980	0,2313	15	25	1263,3494
983	0,232	15	25	1290,4802
986	0,2327	15	25	1311,9514
989	0,2334	15	25	1336,0905
992	0,2341	15	25	1351,1644
995	0,2348	15	25	1367,4639
998	0,2355	15	25	1393,2251
1001	0,2363	14	20	1353,019
1004	0,237	14	20	1365,9646
1007	0,2377	14	20	1373,1846
1010	0,2384	14	20	1388,7393
1013	0,2391	14	20	1419,5247
1016	0,2398	12	20	1255,2339
1019	0,2405	13	20	1393,6462
1022	0,2412	14	20	1478,0908
1025	0,2419	14	20	1478,4338
1028	0,2426	14	20	1474,0535
1031	0,2433	13	20	1394,1478
1034	0,244	13	20	1381,7883
1037	0,2447	13	20	1373,7202
1040	0,2455	13	20	1374,0007
1043	0,2462	13	20	1355,1091
1046	0,2469	13	20	1352,8577

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
1049	0,2476	13	20	1328,1571
1052	0,2483	13	20	1300,3754
1055	0,249	13	20	1287,5573
1058	0,2497	13	20	1279,7052
1061	0,2504	12	16	1126,1157
1064	0,2511	12	16	1116,2628
1067	0,2518	12	16	1097,3492
1070	0,2525	12	16	1064,5957
1073	0,2532	12	16	1052,4951
1076	0,254	12	16	1038,7686
1079	0,2547	12	16	1025,8633
1082	0,2554	12	16	1019,2101
1085	0,2561	12	16	1016,0544
1088	0,2568	12	16	1010,162
1091	0,2575	12	16	997,8748
1094	0,2582	12	16	992,79
1097	0,2589	12	16	982,0339
1100	0,2596	12	16	979,6867
1103	0,2603	12	16	990,3309
1106	0,261	12	16	1004,1772
1109	0,2617	12	16	1006,3217
1112	0,2624	12	16	988,8178
1115	0,2632	12	16	991,9274
1118	0,2639	12	16	987,0262
1121	0,2646	12	16	982,3112
1124	0,2653	12	16	977,8234
1127	0,266	12	16	989,2283
1130	0,2667	12	16	995,7573
1133	0,2674	12	16	1008,6238
1136	0,2681	11	16	728,3336
1139	0,2688	11	16	731,4991
1142	0,2695	11	16	737,2726
1145	0,2702	11	16	757,8156
1148	0,2709	11	16	777,1158
1151	0,2717	11	16	793,8404
1154	0,2724	11	16	812,2812
1157	0,2731	11	16	858,8089
1160	0,2738	11	16	912,3715
1163	0,2745	12	16	1175,8654
1166	0,2752	12	16	1209,2017
1169	0,2759	12	16	1217,8695
1172	0,2766	12	16	1223,5718
1175	0,2773	12	16	1245,0797
1178	0,278	12	16	1262,6234
1181	0,2787	12	16	1269,3859
1184	0,2794	12	16	1265,9081

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
1187	0,2802	12	16	1273,3633
1190	0,2809	12	16	1278,5466
1193	0,2816	12	16	1277,0304
1196	0,2823	12	16	1289,4513
1199	0,283	12	16	1307,8384
1202	0,2837	12	16	1314,8798
1205	0,2844	12	16	1320,1313
1208	0,2851	12	16	1351,8383
1211	0,2858	12	16	1383,8882
1214	0,2865	12	16	1419,0497
1217	0,2872	12	16	1434,8434
1220	0,2879	12	16	1451,986
1223	0,2886	12	16	1475,4283
1226	0,2894	12	16	1495,8353
1229	0,2901	12	16	1519,0703
1232	0,2908	12	16	1534,1288
1235	0,2915	12	16	1561,8802
1238	0,2922	12	16	1586,3247
1241	0,2929	12	16	1609,3042
1244	0,2936	12	16	1637,389
1247	0,2943	12	16	1656,6436
1250	0,295	12	16	1694,5101
1253	0,2957	12	16	1744,8234
1256	0,2964	12	16	1789,1407
1259	0,2971	12	16	1811,8223
1262	0,2979	12	16	1826,2932
1265	0,2986	12	16	1834,7906
1268	0,2993	12	16	1841,3464
1271	0,3	12	16	1850,9192
1274	0,3007	12	16	1866,1534
1277	0,3014	12	16	1882,7368
1280	0,3021	11	16	1823,9281
1283	0,3028	11	16	1837,54
1286	0,3035	11	16	1854,2764
1289	0,3042	11	16	1872,5645
1292	0,3049	11	16	1895,0894
1295	0,3056	11	16	1908,749
1298	0,3063	11	16	1931,7809
1301	0,3071	11	16	1945,7905
1304	0,3078	10	16	1845,9681
1307	0,3085	10	16	1861,672
1310	0,3092	10	16	1885,3654
1313	0,3099	10	16	1908,5059
1316	0,3106	10	16	1931,6155
1319	0,3113	10	16	1953,182
1322	0,312	10	16	1977,9323

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
1325	0,3127	10	16	2008,6765
1328	0,3134	10	16	2023,6421
1331	0,3141	10	16	2055,9006
1334	0,3148	9	16	1918,8186
1337	0,3156	9	12	1933,5901
1340	0,3163	9	12	1944,4327
1343	0,317	9	12	1956,1425
1346	0,3177	9	12	1968,5381
1349	0,3184	9	12	1993,2952
1352	0,3191	9	12	2036,2695
1355	0,3198	9	12	2058,5676
1358	0,3205	9	12	2073,5779
1361	0,3212	9	12	2087,1458
1364	0,3219	8	12	1839,2559
1367	0,3226	8	12	1840,984
1370	0,3233	8	12	1846,9071
1373	0,3241	8	12	1854,2853
1376	0,3248	8	12	1872,5886
1379	0,3255	8	12	1886,8354
1382	0,3262	8	12	1906,4275
1385	0,3269	8	12	1921,8839
1388	0,3276	8	12	1935,8007
1391	0,3283	9	12	2174,0374
1394	0,329	9	12	2176,436
1397	0,3297	9	12	2169,8525
1400	0,3304	9	12	2161,9565
1403	0,3311	9	12	2156,0933
1406	0,3318	9	12	2150,0183
1409	0,3325	9	12	2132,2556
1412	0,3333	9	12	2132,6243
1415	0,334	8	9	1860,8477
1418	0,3347	8	9	1836,807
1421	0,3354	8	9	1828,7722
1424	0,3361	8	9	1831,8706
1427	0,3368	8	9	1831,3225
1430	0,3375	8	9	1827,791
1433	0,3382	8	9	1813,7927
1436	0,3389	8	9	1794,7145
1439	0,3396	8	9	1788,9298
1442	0,3403	8	9	1791,7712
1445	0,341	8	9	1786,8749
1448	0,3418	8	9	1770,8925
1451	0,3425	8	9	1757,525
1454	0,3432	8	9	1743,9117
1457	0,3439	8	9	1731,8915
1460	0,3446	8	9	1723,6031

Box Size	E	Count	Totals	Std.Dev (σ)
1463	0,3453	8	9	1730,7241
1466	0,346	8	9	1739,6172
1469	0,3467	8	9	1741,9144
1472	0,3474	8	9	1736,7067
1475	0,3481	8	9	1735,8168
1478	0,3488	8	9	1741,0508
1481	0,3495	8	9	1740,8809
1484	0,3502	8	9	1748,278
1487	0,351	8	9	1733,8893
1490	0,3517	8	9	1718,4749
1493	0,3524	8	9	1713,3295

ANNEX C; ARTICLE

En aquest últim annex he volgut adjuntar un article publicat a ELPAÍS.com referent a la mort de Benoît Mandelbrot

FALLECE MANDELBROT, EL PADRE DE LOS FRACTALES

EL MATEMÁTICO FRANCO-ESTADOUNIDENSE DESARROLLÓ UNA NUEVA GEOMETRÍA DE LO IRREGULAR CON NUMEROSAS APLICACIONES

EL PAIS/AFP - MADRID - 18/10/2010

A los 85 años ha muerto, en la ciudad estadounidense de Cambridge, Benoit Mandelbrot, el gran matemático que inventó la geometría fractal, la que permite medir fenómenos naturales antes inaccesibles, como las nubes o las líneas de la costa. El fallecimiento tuvo lugar el pasado jueves a consecuencia de un cáncer, según un comunicado de la familia.

Mandelbrot nació en Varsovia el 20 de noviembre de 1924, pero se refugió con su familia en



Benoît Mandelbrot, en una fotografia de 2006.-

CRISTÓBAL MANUEL

Francia, donde adquirió la nacionalidad, y trabajó en el Centro Nacional de Investigación Científica (CNRS). Por eso ayer el presidente francés Nicolás Sarkozy evocó su memoria en un comunicado: "Un espíritu pujante, original, que nunca dudaba en innovar y en abrir brechas en las ideas recibidas". Tras la Segunda Guerra Mundial vivió algún tiempo en Estados Unidos y en 1958 empezó a trabajar en el centro de investigación de la empresa IBM. A su muerte era catedrático emérito de la Universidad de Yale .

El matemático desarrolló en los años setenta los objetos fractales, una nueva clase de objetos matemáticos que fueron juzgados "monstruosos" por cierto número de sus colegas, según sus propias palabras. Pero sus descubrimientos tuvieron aplicación en numerosos campos, como la geología, la medicina, la astronomía y la ingeniería, sin olvidar las finanzas y la anatomía.

Una de sus últimas intervenciones públicas se produjo en el Congreso Internacional de Matemáticos ICM2006, celebrado en Madrid. El término *fractal*, del latín *fractus* (roto), fue acuñado por Mandelbrot en 1975. En el ICM2006 explicó: "Salvo unas pocas excepciones, como el ojo o la Luna, las formas de la naturaleza son rugosas, irregulares, no homogéneas ni simples. Y [hasta el estudio matemático de los fractales] las matemáticas se han concentrado siempre en figuras simples. Me siento muy afortunado por trabajar en las matemáticas de lo irregular".

"Los fractales, es fácil, son como una coliflor romanesco [una variedad de coliflor con formas simétricas]. Esto quiere decir que cada pequeño trozo es exactamente como la coliflor de sí misma. Es una curva que se reproduce hasta el infinito. Cuando se ve el objeto desde más cerca se encuentra la misma curva", ha explicado Catherine Hill, estadística del Instituto Gustave Roussy, en Villejuif, cerca de París.

La relación de los fractales con el infinito es peculiar, explica el proyecto i-Math. Lo ilustra la llamada *paradoja de la costa*. Quien intente medir el litoral obtendrá un resultado distinto en función del grado de detalle al que aspire: si tiene en cuenta sólo el contorno de las bahías o si va midiendo cada roca, cada piedrecita, cada grano de arena... En un fractal ideal el litoral - cualquier contorno rugoso, en realidad- llegaría a hacerse infinito.

Esta propiedad hace que los fractales no quepan en la geometría y el cálculo convencionales. Ha habido que crear para ellos matemáticas nuevas. Por ejemplo, resulta que los fractales tienen dimensión *fraccionaria*. Una curva no rugosa -no fractal-, tiene dimensión 1. Una superficie, como un cuadrado, tiene dimensión 2. Pero ¿qué pasa con una curva fractal (los matemáticos llaman curva a cualquier cosa que se dibuje sin levantar el lápiz)? Una curva fractal es infinita, y a pesar de eso no llena superficie alguna... La solución matemática de esta rareza pasa por dar a los fractales una dimensión mayor que uno y menor que dos, esto es, un número fraccionario.

Antenas fractales y otras aplicaciones

En las últimas décadas los fractales han invadido múltiples ámbitos, como explicaba el propio Mandelbrot en Madrid: "Piensa en las antenas: en muchos dispositivos modernos las antenas son fractales porque son mucho más eficientes. O en las paredes de las casas; si fueran fractales absorberían el ruido, y de hecho ya hay patentes de muros fractales con textura rugosa que absorbe el ruido en vez de reflejarlo".

La lista de ejemplos es larga: un nuevo cemento basado en materiales fractales que impiden que el agua entre y deteriore la estructura del edificio; elementos de microelectrónica con estructura fractal... "La tradición era pensar en formas suaves; al romper esta tradición, los fractales se están volviendo cada vez más útiles", dijo Mandelbrot.